Экономико-
математическая
библиотека

И. И. ЕРЕМИН
В. Д. МАЗУРОВ
Н. Н. АСТАФЬЕВ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

И. И. ЕРЕМИН, В. Д. МАЗУРОВ,
Н. Н. АСТАФЬЕВ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.18
Е 70
УДК 519.6

Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.— 336 с.

Книга посвящена разработке теории несобственных задач математического программирования (в первую очередь двойственности), методам их коррекции, т. е. аппроксимации собственными задачами по тому или иному критерию качества аппроксимации. Такие задачи весьма часто возникают в практике моделирования и решения задач производственного планирования и проектирования.

Для специалистов в области прикладной математики, а также научных работников, связанных с решением задач планирования, управления производством и проектирования.

Рис. 2. Табл. 3. Библ. 121 назв.

$Е\frac{1702070000-114}{053(02)\text{-}83}$ 47-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание настоящей книги определилось итогами исследований ряда авторов по несовместным системам линейных и нелинейных неравенств [23—26, 50, 51, 87, 89—91, 93], задачам линейного и выпуклого программирования с противоречивыми системами ограничений [30—32, 56, 57], и более общо — по *несобственным* (неразрешимым) моделям математического программирования [33—37, 58].

Параллельно нарастанию теоретических исследований накапливался опыт практических применений методов коррекции несобственных моделей в решении задач планирования и управления производством, алгоритмов комитетного распознавания. Это обстоятельство наложило свой отпечаток и на характер самих исследований.

Однако использование методов коррекции — это только изначальный аспект применений, направленных на развязку «узких мест» производства, исчисление предельных значений для тех или иных экономических параметров, на обоснование реальности планов и т. д. Другой, более глубокий, аспект состоит в использовании теории двойственности, разработанной для несобственных задач программирования. Последняя позволяет вскрыть характер имеющихся экономических тенденций (на модельном уровне) и измерить их темпы в условиях, когда классический аппарат двойственности не работает.

Помимо теории и методов для несобственных моделей программирования (линейного и выпуклого) в книгу включен материал по анализу несобственных задач перспективного и текущего планирования, а также задач объемно-календарного планирования машиностроительного производства.

Направление, связанное с изучением несобственных задач математического программирования, представляется перспективным, а применение аппарата для таких задач к анализу реальных экономических систем — актуальным.

Авторами материала книги (по параграфам) являются: И. И. Еремин — §§ 1—11, 23; И. И. Еремин, Н. Н. Астафьев — § 22; В. Д. Мазуров — §§ 16—21; Н. Н. Астафьев — § 24—25; А. А. Ватолин — §§ 12—13, 26; Л. Д. Попов — §§ 14, 28; В. Д. Скарин — §§ 15, 27; С. В. Плотников — § 29; В. Н. Фролов, В. М. Кисляк — § 30; В. Н. Фролов — § 31; В. М. Кисляк — § 32.

В книге принята сквозная нумерация параграфов. Теоремы, леммы, следствия и замечания, а также формулы нумеруются двумя индексами: первый из них — это номер параграфа, второй — номер самой теоремы (леммы, следствия, замечания, формулы). При ссылках внутри текста книги на теоремы, формулы и т. д. указываются присвоенный им номер (без указания номера главы или параграфа).

И. И. Еремин, В. Д. Мазуров, Н. Н. Астафьев

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена теории и методам анализа несобственных задач математического программирования и распознавания образов, т. е. задач, которые в силу тех или иных причин не обладают решением.

Для задач математического программирования можно сформулировать понятие несобственной задачи более точно: это задача, не обладающая свойством одновременной разрешимости прямой и двойственной задач и совпадения их оптимальных значений. Необходимость разработки теории и методов анализа (в частности, численного) таких задач во многом определялась и стимулировалась практикой решения прикладных задач (экономических, технических и др.), хотя для этого были причины и чисто внутреннего для математического программирования характера (несовместные системы неравенств, методы их аппроксимации с целью применения в различных разделах математики, например, в теории и практике приближения функций).

Простейшим (хотя, возможно, и наиболее важным в прикладном отношении) выражением несобственности задачи математического программирования с ограничениями в виде системы неравенств $f_j(x) \leqslant b_j$ $(j = 1, \ldots, m,$ $x \in M \subset \mathbf{E}_n)$ (с интерпретацией величин b_j как используемых ресурсов) может быть несовместность этой системы. При этом выполняется свойство: если вектор ресурсов $b = [b_1, \ldots, b_m]$ откорректирован с помощью вариации $\Delta b = [\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m]$ так, что система $f_j(x) \leqslant b_j + \Delta b_j$ $(j = 1, \ldots, m, x \in M)$ становится совместной, то задача оптимизации при этих ограничениях разрешима.

Соприкасаясь с самыми различными по предмету и методу исследования науками, математика вынуждена пересматривать, модифицировать свои модели, расширять класс моделей, считающихся допустимыми. Модифицируются схемы и принципы, появляются новые формальные схемы рассуждений. Так, например, появилась теория некорректно поставленных задач. Другой пример связан с несобственными задачами оптимизации и распознавания образов. Практика конструктивного использования несобственных моделей заставляет придать дальнейшее развитие такому общему логическому принципу, как принцип противоречия, согласно которому в любом рассуждении не должны возникать формальные противоречия.

Изучение в современной математике задач или теоретических моделей, содержащих противоречия, связано с необходимостью научного обоснования процедур корректирования таких задач и моделей.

Моделирование сложных процессов и явлений — процедура многошаговая. Первоначальное описание (модель) объекта, имеющее вид системы уравнений, неравенств и других соотношений (в частности, предикатных), связывающих параметры или характеристики объекта, может быть противоречивым, т. е. соответствующая система соотношений может не иметь решений, быть несовместной. Эта противоречивость может быть вызвана неточностью данных, чрезмерным упрощением действительных связей, абсолютизацией некоторых требований и другими причинами. Более того, противоречивая модель может быть адекватным отражением действительных противоречий, а способы ее корректировки — отражением действительных процедур разрешения реальных противоречий. В этих случаях на последующих шагах «отладки» модели предпринимаются те или иные процедуры корректировки или уточнения соотношений модели и ее структуры.

Но если стремиться делать такие процедуры научно обоснованными (а это необходимо), то объектом теоретического исследования становится противоречивая модель. Противоречивость можно считать одним из факторов плохой формализуемости. Существуют различные причины плохой формализуемости задачи выбора решения в моделях оптимизации, среди которых можно назвать:

— плохую определенность ограничений и критериальных функций (их малую изученность, сложную структуру);

— противоречивость, несогласованность друг с другом ограничений и целей;

— неоднозначность решения;

— неустойчивость модели (т. е. эволюцию и моделируемого объекта, и наших знаний о нем).

Отметим, что плохая формализуемость является почти обязательным атрибутом достаточно близких к практике задач. Наличие плохо формализуемых факторов характерно, например, для задач проектирования природно-технических комплексов, находящихся в ведении различных организаций, интересы которых не согласованы, а также для задач планирования эксплуатации таких комплексов. В этом случае на первое место выступает противоречивость критериев оценки качества эксплуатации комплекса.

Вообще в задачах оптимального планирования противоречивые модели возникают как на эмпирическом этапе исследования, так и на этапе формального анализа. В связи с этим возникает необходимость введения ряда обобщений для понятия решения, понятия существования решения, понятия непротиворечивости теоретической модели, введения «размытых» определений и принципов принятия решений. Некоторые противоречивые ситуации моделирования связаны с использованием противоречивых систем предикатов, которым можно поставить в соответствие лишь несобственные объекты. Один из путей разрешения таких ситуаций состоит в расширении представлений о допустимых объектах, в ослаблении накладываемых при определении объекта требований, в их «размывании», в расширении смысла понятия существования объектов и т. д.

В математике изучение и использование противоречивых моделей имеет уже давнюю историю. Так, еще К. Гаусс при разработке метода наименьших квадратов имел дело с переопределенной несовместной системой линейных уравнений. Несовместные системы линейных неравенств в связи с задачами проектирования механических систем рассматривал П. Л. Чебышев [87]. Позднее системы линейных неравенств, не обязательно совместные, рассматривались другими авторами [23—26, 89—91].

Итак, практика теоретических и прикладных математических исследований требует уточнения и развития классического положения о том, что всякая теоретическая модель должна быть непротиворечивой. Это положение слишком категорично, чтобы быть конструктивным. Пока изучались достаточно простые объекты, с малым числом учитываемых параметров, такое положение не казалось ограничительным и представлялось очевидно верным, так как в случае возникновения противоречивой модели ее коррекция осуществлялась простыми приемами.

По-видимому, модель, которая получается на последнем этапе исследования, должна быть непротиворечивой. В то же время исходная модель может быть противоречивой. Более того, класс противоречивых моделей обладает бо́льшими возможностями адаптации к современным практическим требованиям. Это вытекает из богатого опыта прикладных математических исследований.

Нам представляется важным подчеркнуть следующие положения.

1) Противоречивые модели, противоречивые теории могут включаться в число допустимых и конструктивно используемых.

2) В принципе, противоречивые модели богаче по содержанию, чем непротиворечивые.

3) К математическому анализу противоречивых моделей вынуждает практика их конструктивного использования.

4) Практика использования противоречивых моделей требует некоторых дополнений к классической формулировке принципа противоречия.

5) Использование противоречивых моделей связано с обеспечением большей гибкости и адекватности моделей.

6) Использование противоречивых моделей связано с обобщением понятия непротиворечивости и расширением понятия существования (так как не любые противоречивые модели применимы). Эффективное оформление этих обобщений может быть дано в рамках непрерывных и дискретных аппроксимаций.

Опыт работы с противоречивыми моделями, с несобственными задачами привел к различным конструкциям, среди которых простейшие связаны с теми или иными видами коррекции, приводящими к непротиворечивым моделям. Заметим, что если бы все дело сводилось к корректированию противоречивой модели, к преобразованию ее в непротиворечивую и дальнейшей работе уже с непротиворечивой моделью, то по существу не имелось бы никакого принципиально нового момента. Но оказалось, что это лишь один из возможных способов анализа, что чаще всего содержательный смысл и значение имеет само исходное противоречивое описание объекта или ситуации, а не производные от этого описания непротиворечивые модели.

Противоречивыми теоретическими моделями могут отражаться сложные социальные и технико-экономические ситуации. Причинами противоречий могут быть: переопределенность требований, неточность информации, идеализация или искажение некоторых соотношений. В этом случае не существует ситуации, параметры которой удовлетворяли бы всем соотношениям одновременно.

Рассмотрим пример модели большой природно-технической системы. Эта модель состоит из нескольких больших блоков, относящихся к природным компонентам системы и к производственным подсистемам. Блоки связаны друг с другом по входным и выходным переменным. В моделях такого рода противоречия могут возникать как отражения реальных противоречий между компонентами сложной системы, а также ввиду информационной несогласованности блоков. Причинами возникновения несобственных моделей, описывающих задачи экономического (производственного) планирования и управления, могут быть:

— ресурсный дефицит;

— напряженность (перенапряженность) плана;

— отсутствие резервов производственных мощностей;

— неточность экономической информации;

— учет противоречивых директив;

— учет отрицательного воздействия производства на среду и учет нормативов на такое воздействие.

Естественно, это перечень только некоторых из причин возникновения противоречивых моделей, носящих более или менее общий характер.

Практика решения производственных задач планирования показывает, что возникновение несобственных моделей — это довольно обычная ситуация. Конечно, в этом случае, исходя из тех или иных эвристических соображений, можно ряд ограничений снять или ослабить, скорректировать исходные данные и добиться того, что задача будет разрешимой. Однако куда важней и целесообразней подход, основывающийся на применении объективных процедур для «развязки» (коррекции) такой модели, т. е. для преобразования ее в разрешимую (или совокупность таковых). «Развязку» можно еще интерпретировать как развязку узких мест.

Таким образом, модель с несовместной системой ограничений (как одним из проявлений свойств несобственности) содержательно может быть не менее важной (а в ряде случаев — и более), чем с совместной.

Сказанное дополним еще одним соображением. Возможно, моделируя производственную ситуацию (речь идет о задачах планирования), целесообразно при поиске адекватной модели идти от варианта собственной модели к несобственной (например, за счет включения в модель новых ограничений, не учтенных или не учитываемых ранее, включения новых технологических способов и т. д.), а от последней — к собственной, но уже на основе объективных процедур коррекции.

Заметим, что различные способы анализа противоречивых моделей связаны не только с различными способами корректирования массива определяющей информации, но и с некоторыми конструкциями более сложных комитетных решающих правил, в частности, неоднозначных или вероятностных.

В первой, вводной, главе мы остановимся лишь на некоторых, центральных в определенном смысле, вопросах: классификации несобственных задач линейного программирования, аппроксимации несовместных систем линейных и выпуклых неравенств (как базового объекта в линейном и выпуклом программировании), принципе двойственности, основных моделях коррекции несобственных задач, модели двухступенчатой коррекции.

§ 1. Классификация несобственных задач линейного программирования

Запишем задачу линейного программирования (ЛП) в форме

$$L:\ \max\{(c,\ x):\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}, \qquad (1.1)$$

где $c^T = [c_1, \ldots, c_n] \in \mathbf{E}_n$, $b^T = [b_1, \ldots, b_m] \in \mathbf{E}_m$, $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix}$, $a_j = [a_{j1}, \ldots, a_{jn}] \in \mathbf{E}_n$ $(j = 1, \ldots, m)$, и пусть $\bar{l}$ — ее оптимальное значение. Форма записи (1.1) задачи L удобна ввиду стандартной и полезной экономико-технологической интерпретации, в соответствии с которой b — вектор ресурсов, c — вектор цен, столбцы матрицы A (технологической матрицы) моделируют технологические способы путем задания затрат ресурсов, приходящихся на единичную интенсивность использования соответствующих способов, так что вектор интенсивностей $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ задает уровень производства (план производства).

Двойственной к (1.1) является задача ЛП

$$L^*\colon \min\{(b, u)\colon A^{\mathrm{T}}u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}. \tag{1.1*}$$

Ее оптимальное значение обозначим через $\underset{\sim}{l}$. Введем обозначения: $M = \{x \geqslant 0\colon Ax \leqslant b\}$, $M^* = \{u \geqslant 0\colon A^{\mathrm{T}}u \geqslant c\}$. Эти множества называются *допустимыми* для L и L^* соответственно.

Основной факт, связывающий задачи L и L^*, формулируется как теорема двойственности:

Если задача L разрешима, то L^* также разрешима; при этом $\tilde{l} = \underset{\sim}{l}$.

В силу известного равенства $(L^*)^* = L$, приведенное утверждение симметрично относительно L и L^*.

Если L разрешима, то назовем ее *собственной* задачей, а противном случае — *несобственной*.

Предположение $M \neq \varnothing$, $M^* \neq \varnothing$ равносильно разрешимости задачи L, а следовательно, и задачи L^*.

1.1. Классификация. Если задача L является несобственной, то возможны следующие три случая:

$$M = \varnothing,\quad M^* \neq \varnothing; \tag{1.2}$$

$$M \neq \varnothing,\quad M^* = \varnothing; \tag{1.3}$$

$$M = \varnothing,\quad M^* = \varnothing. \tag{1.4}$$

В зависимости от выполнимости одного из условий (1.2)—(1.4) будем говорить о несобственной задаче L соответственно 1-го, 2-го или 3-го рода.

Из данной классификации несобственных задач ЛП видно, что если L — несобственная задача 1-го рода, то L^* — 2-го рода (и наоборот); если L — несобственная 3-го рода, то L^* — также несобственная 3-го рода (и наоборот).

Дадим характеризацию каждого из этих условий. Первое из них означает, что как только при некотором приращении $\Delta b \in \mathbf{E}_m$ система неравенств

$$Ax \leqslant b + \Delta b, \qquad x \geqslant 0 \tag{1.5}$$

совместна, задача

$$\max\{(c, x)\colon Ax \leqslant b + \Delta b,\ x \geqslant 0\} \tag{1.6}$$

разрешима. Действительно, из совместности системы (1.5) и условия $M^* \neq \varnothing$ следует разрешимость как (1.6), так и

$$\min\{(b + \Delta b, u)\colon A^{\mathrm{T}}u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}. \tag{1.6*}$$

Обратно, если при некотором Δb задача (1.6) разрешима, то разрешимость (1.6)* влечет $M^* \neq \varnothing$.

Условие (1.3) означает, что в задаче L оптимальное значение $\tilde{l}$ равно $+\infty$. Наконец, условие (1.4) эквивалентно тому, что при любом приращении Δb, обеспечивающем разрешимость системы (1.5), оптимальное значение задачи (1.6) равно $+\infty$.

Приведенные характеризации являются тривиальными следствиями теоремы двойственности для задач ЛП.

Классификация несобственных задач выпуклого программирования (ВП) будет рассмотрена в § 22.

1.2. Содержательная интерпретация несобственных задач ЛП. Как уже отмечалось, ситуация, когда система ограничений в модели линейного программирования, поставленной в соответствие реальной экономической задаче, несовместна, является довольно обычной. Чаще корректировка вектора b за счет приращения Δb приводит к разрешимости задачи (1.6), этому соответствует случай (1.2). В основу корректировки вектора b могут быть положены разные подходы, приводящие к разным математическим постановкам. Можно, например, требовать от корректирующего приращения Δb, чтобы оно было аргументом оптимизационной задачи

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \Delta b_j \colon Ax \leqslant b + \Delta b,\ x \geqslant 0\right\}, \tag{1.7}$$

где $[\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m]^T = \Delta b$, $\bar{u}_j > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. При этом $\bar{u}_j$ можно интерпретировать как меру потерь, связанных с изменением ресурса b_j на единицу (т. е. с заменой b_j на $b_j + 1$). По смыслу описанной корректировки некоторые приращения Δb_j могут быть отрицательными, и тогда в функции суммарных потерь $\sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \Delta b_j$ соответствующие им слагаемые $\bar{u}_j \Delta b_j$ будут отрицательными.

Несколько иной, но содержательно очевидной, является корректировка, подчиненная оптимизационной задаче

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \Delta b_j \colon Ax \leqslant b + \Delta b,\ [x, \Delta b] \geqslant 0\right\}. \tag{1.8}$$

Рассмотренная выше интерпретация несобственности 1-го рода для задачи L связывалась с ресурсным дефицитом. Коррекцию такой задачи будем называть *коррекцией по дефициту ресурсов*. Однако причиной несовместности может быть просто неточность задания вектора b (почти все экономические показатели носят приближенный характер).

Далее мы проследим, как неточность задания исходных данных приводит к различным видам несобственности для задач ЛП.

Обычно для того или иного показателя α можно лишь указать отрезок $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, в котором он лежит, в редких случаях — закон его распределения на указанном отрезке. Поэтому, если $\underline{b}$ и $\overline{b}$ — возможные границы для значения вектора b, определяющие неточность его задания, то важно выяснить, является ли система

$$Ax \leqslant y, \quad \underline{b} \leqslant y \leqslant \overline{b}, \quad x \geqslant 0 \tag{1.9}$$

совместной. Если она совместна относительно x при некотором $\bar{y} \in [\underline{b}, \overline{b}]$, то система ограничений в задаче (1.1) с полным основанием может быть заменена на систему

$$Ax \leqslant \bar{y}, \quad x \geqslant 0,$$

а сама задача (1.1) — на задачу

$$\max\{(c, x): Ax \leqslant \bar{y}, \quad x \geqslant 0\}.$$

Рассмотрение смысла несобственных задач ЛП 2-го рода будет связано с понятием корректности разрешимой задачи ЛП по той или иной подсистеме ее исходных данных. Полной системой исходных данных задачи (1.1) является

$$I = \left\{\{a_{ji}\}_{j,i=1}^{m,n}, \{b_j\}_{j=1}^{m}, \{c_i\}_{i=1}^{n}\right\}.$$

Нам удобно в дальнейшем использовать следующее определение *I'-устойчивости* задачи (1.2), где $I' \subset I$.

Задачу (1.2) будем называть *I'-устойчивой*, если малые вариации показателей из I' оставляют ее разрешимой, а оптимальное значение задачи непрерывно зависит от этих вариаций.

Если $I' = \{c_1, \ldots, c_n\}$, то будем говорить о *$c$-устойчивости*. Известно, что задача (1.1) c-устойчива тогда и только тогда, когда множество $\tilde{M}$ ее оптимальных решений ограничено. Если оно не ограничено, то существуют как угодно малые (по норме) вариации Δc, при которых

$$\sup\{(c + \Delta c, x): x \in M\} = +\infty. \tag{1.10}$$

Убедимся в этом. Из неограниченности $\tilde{M}$ в силу его выпуклости и замкнутости следует, что для любого вектора $\tilde{x} \in \tilde{M}$ существует $s \neq 0$ такое, что $x(t) = \tilde{x} + ts \in \tilde{M}$ $\forall t > 0$. Так как $(c, x(t)) = \tilde{l}$, то $(c, s) = 0$. Возьмем $\Delta c = \alpha s$, $\alpha > 0$. Из соотношения $(c + \Delta c,\ x(t)) = \alpha(\tilde{x},\ s) + (c, \tilde{x}) + t\alpha\|s\|^2$ с учетом $(c, s) = 0$ вытекает $\lim\limits_{t \to +\infty} (c + \Delta c,\ x(t)) = +\infty$, что дает (1.10).

Сказанное выше показывает, что если задача L в своем точном задании разрешима, но не c-устойчива, то приближенное задание вектора c в виде $\bar{c} = c + \Delta c$ может привести к ситуации (1.10), т. е. к несобственной задаче 2-го рода. Следовательно, если мы имеем дело с реально заданной моделью

$$\max\{(\bar{c}, x):\ x \in M\},$$

оптимальное значение которой равно $+\infty$, то возникает вопрос, не могло ли это произойти за счет неточного задания вектора c. Если та минимальная по норме вариация Δc, $\bar{c} = c + \Delta c$, которая ведет к разрешимости задачи

$$\max\{(c, x):\ x \in M\}, \tag{1.11}$$

укладывается в рамки ошибок задания вектора $\bar{c}$, то модель (1.11) может рассматриваться как результат коррекции по неточности информации модели (1.10). Последняя может быть с полным основанием заменена на (1.11). Будучи неустойчивой, она требует для своего решения тех или иных приемов регуляризации.

Наконец, остановимся на аналогичной интерпретации несобственных задач ЛП 3-го рода. Свяжем ее с рассмотрением задачи, отвечающей симметрической коррекции задачи L:

$$\max\{(c - \Delta c, x):\ Ax \leqslant b + \Delta b,\quad x \geqslant 0\}. \tag{1.12}$$

Такая коррекция интересна тем, что двойственно симметрична, а именно, подвергнув аналогичной коррекции задачу L^*, получим

$$\min\{(b + \Delta b, u):\ A^T u \geqslant c - \Delta c,\quad u \geqslant 0\}; \tag*{(1.12)*}$$

последняя является двойственной к (1.12).

Пусть

$$K = \{[\Delta c, \Delta b) \in \mathbf{E}_{n+m}:\ \text{задача (1.12) разрешима}\},$$

$$M(\Delta b) = \{x:\ Ax \leqslant b + \Delta b,\quad x \geqslant 0\},$$

$$M^*(\Delta c) = \{u:\ A^T u \geqslant c - \Delta c,\quad u \geqslant 0\},$$

$$K_b = \{\Delta b:\ M(\Delta b) \neq \varnothing\},$$

$$K_c = \{\Delta c:\ M^*(\Delta c) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, $K_b \neq \varnothing$ и $K_c \neq \varnothing$. Множества K, K_b и K_c связаны соотношением $K = K_b \times K_c$.

Действительно, одновременная совместность систем

$$Ax \leqslant b + \Delta b, \quad x \geqslant 0, \tag{1.13}$$

$$A^T u \geqslant c - \Delta c, \quad u \geqslant 0, \tag{1.14}$$

при некоторых Δb и Δc влечет разрешимость (1.12) (а потому и (1.12)*). С другой стороны, если при некоторых Δb и Δc задача (1.12) разрешима, то разрешима и задача (1.12)*, а потому их системы ограничений (1.13) и (1.14) совместны.

Пусть

$$[\overline{\Delta c}, \overline{\Delta b}] \in \operatorname{Argmin}\{\|\Delta b\| + \|\Delta c\| : [\Delta c, \Delta b] \in K\}.$$

Если $\overline{\Delta b}$ и $\overline{\Delta c}$ укладываются в рамки возможных ошибок в задании b и c, то разрешимая задача

$$\max\{(\bar{c}, x): \ Ax \leqslant \bar{b}, \quad x \geqslant 0\},$$

в которой $\bar{c} = c - \overline{\Delta c}$, $\bar{b} = b + \overline{\Delta b}$, может рассматриваться как откорректированная по неточности информации. Приращения $\overline{\Delta b}$ и $\overline{\Delta c}$ делают откорректированной и задачу L^*.

На самом деле, сказанное можно повторить, распространив рассуждение на систему всех показателей, задающих задачу (1.1). А именно, пусть $I = [\underline{s}, \bar{s}]$, где $\underline{s} = [\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}]$, $\bar{s} = [\bar{A}, \bar{B}, \bar{c}]$, — параллелепипед, задающий множество возможных значений для информационного вектора $s = [A, b, c]$, поставленного в соответствие задаче (1.1). В этом случае может быть поставлена задача о выявлении совместности относительно более сложной системы неравенств

$$Ax \leqslant b, \quad \underline{A} \leqslant A \leqslant \bar{A}, \quad \underline{b} \leqslant b \leqslant \bar{b}, \quad x \geqslant 0 \tag{1.15}$$

и разрешимости задачи

$$\max\{(\tilde{c}, x): \ \tilde{A}x \leqslant \tilde{b}, \quad x \geqslant 0\}, \tag{1.16}$$

в которой $\underline{c} \leqslant \tilde{c} \leqslant \bar{c}$, а $\tilde{A}$ и $\tilde{b}$ при некотором $\tilde{x} \geqslant 0$ удовлетворяют системе (1.15).

Если задача (1.16) сформирована, то она может служить объективно равноценной заменой для (1.1), независимо от того, являлась ли задача (1.1) собственной или несобственной. Следовательно, задачи (1.16) могут рассматриваться как информационно эквивалентные в том смысле, что они не упорядочены по информационной предпочтительности, хотя их случайные реализации и не дают равномерного распределения для тех или иных производных от (1.16) характеристик (например, оптимального значения) в соответствующих областях значений этих характеристик. Последние же, естественно, уже могут быть положены в основу того или иного упорядочения множества разрешимых задач (1.16), например, по оптимальному значению $\tilde{l}(\tilde{c}, \tilde{A}, \tilde{b})$. В этом случае можно ставить проблему выбора модели (1.16), подчиненного принципу гарантированного результата, что формализуется с помощью задачи

$$\min\{\tilde{l}(\tilde{s}):\ \tilde{s}\in\tilde{I}\},$$

где $\tilde{I}=\{\tilde{s}\in I$: задача (1.16) разрешима$\}$.

§ 2. Коррекция несовместных систем линейных и выпуклых неравенств

Одним из проявлений несобственности (а, возможно, и наиболее важным) задачи ЛП или ВП является несовместность системы ее ограничений. Запишем эту систему в виде

$$f_j(x)\leqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ m,\quad x\in M, \tag{2.1}$$

здесь M — выпуклое замкнутое множество из $\mathbf{E}_n$, чаще всего $M=\mathbf{E}_n^+$.

Выпишем частный случай системы (2.1), когда функции являются линейными, а $M=\mathbf{R}_+^n$:

$$l_j(x)=(a_j,\ x)-b_j\leqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ m,\quad x\geqslant 0. \tag{2.2}$$

В случае несобственности 1-го рода (классификация несобственных задач ВП будет рассмотрена в § 22) коррекция соответствующей задачи сводится к коррекции ее системы ограничений. Если речь идет о коррекции задачи ЛП, то, как было показано в § 1, она сводится к коррекции некоторой системы линейных неравенств, если только эта коррекция осуществляется за счет изменения векторов c и b.

Пусть $d(y)$ — выпуклая функция, заданная на $\mathbf{E}_m$ и обладающая свойствами $d(0)=0$, $d(y)>0$ $\forall y\geqslant 0$, $y\neq 0$. Примерами таких функций $d(y)$ могут быть: $d_0(y)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|y_j|$, $d_1(y)=\sum\limits_{j=1}^{m}|y_j|$, $d_2(y)=\|y\|^2$ и др. С помощью такой функции мы введем меру несовместности E (*уклонения*) системы (2.1), а именно,

$$E = \inf_{x \in M} d\left(f_1^+(x), \ldots, f_m^+(x)\right). \tag{2.3}$$

Здесь «+» над вектором означает замену его отрицательных координат нулями. Операция «+» осуществляет проектирование вектора на $\mathbf{R}_+^n$.

Если нижняя грань в (2.3) достижима, то система (2.1) совместна тогда и только тогда, когда $E=0$. Достижимость гарантируется, например, в случае, если 1) $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ линейны, а M — полиэдрально; 2) $\mathbf{E}_n = \mathbf{R}^n$ и M ограничено в $\mathbf{R}^n$.

Если $d\left(f_1^+(\tilde{x}), \ldots, f_m^+(\tilde{x})\right) = E$, то переход от (2.1) к системе

$$f_j(x) \leqslant f_j(\tilde{x}), \quad j=1, \ldots, m, \quad x \in M, \tag{2.1*}$$

назовем *d-аппроксимацией* системы (2.1).

2.1. Методы субградиентного спуска. Если система (2.1) является выпуклой (т. е. функции $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ выпуклы), то $g(x) = d\left(f_1^+(x), \ldots, f_m^+(x)\right)$ выпукла. Для минимизации функции $g(x)$ на M может быть применен итерационный метод субградиентного спуска:

$$x_{t+1} = P_M(x_t - \alpha_t h_t), \tag{2.4}$$

где $h_t \in \partial g(x_t)$, $\alpha_t > 0$ $\forall t \in N$; $P_M(\cdot)$ — оператор проектирования на M. Если M ограничено, а последовательность $\{\alpha_t\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = 0, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t = +\infty, \tag{2.5}$$

то последовательность $\{x_t\}$, порожденная рекуррентным соотношением (2.4) при произвольном начальном x_0, сходится к $\tilde{M} = \operatorname{Arg\,min}\{g(x)\colon x \in M\}$ (см., например, [38]). Сходимость $\{x_t\}$ к $\tilde{M}$ означает, что

$$\lim_{t\to\infty} |x_t - \tilde{M}| = 0,$$

где $|x_t - \tilde{M}| = \inf\{\|x_t - y\|\colon y \in \tilde{M}\}$.

Рассмотрим частный случай системы (2.1), а именно, систему (2.2). Взяв, например, функцию $d_0(y) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} y_j^+$, получим для $g(x)$ вид

$$g_0(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} l_j^+(x).$$

Тогда одной из частных реализаций процесса (2.4) можно придать форму

$$x_{t+1} = \left[x_t - \alpha_t a_{j_t}\right]^+, \tag{2.6}$$

где j_t определяется условием: $g_0(x) = l_{j_t}^+(x_t)$. При условии (2.5) и ограниченности $\hat{M} = \operatorname{Arg\,min}\{g_0(x)\colon x \geqslant 0\}$ процесс (2.6) сходится к $\hat{M}$. Другим вариантом процесса (2.4) для системы (2.2) при $d(y) = \sum_{j=1}^m y_j^+$ является

$$x_{t+1} = \left[x_t - \alpha_t \sum_{j \in s(x_t)} a_j\right]^+; \tag{2.7}$$

здесь $s(x_t) = \{j\colon l_j(x_t) > 0\}$.

2.2. Фейеровские методы [38]. Отображение $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется *M-фейеровским*, $M \subset \mathbf{R}^n$, если 1) $\varphi(y) = y$ $\forall y \in M$; 2) $\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|$ $\forall x \notin M$, $\forall y \in M$. Класс M-фейеровских отображений обозначим через F_M. Известно, что если отображение $\varphi \in F_M$ непрерывно, то $\lim_{t\to\infty} x_t = x' \in M$, где $x_t = \varphi(x_{t-1})$, при произвольном начальном $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Заметим, что если заданы $\psi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $M = \{y\colon \psi(y) = y\}$ и $\|\psi(x) - \psi(y)\| \leqslant \|x - y\|\, \forall x,\ y \in \mathbf{R}^n$, то $\psi_\alpha(x) = \alpha\psi(x) + (1-\alpha)x \in F_M$ при любом $\alpha \in (0, 1)$. Проверка этого факта тривиальна. Рассмотрим отображения

$$\varphi_0(x) = \left[x - \frac{\lambda}{\delta} \sum_{j=1}^m l_j^+(x)\, a_j\right]^+,$$

$$\varphi_\alpha(x) = (1-\alpha)\varphi_0(x) + \alpha x, \tag{2.8}$$

где $\lambda \in (0, 2)$, $\delta = \sum_{j=1}^m \|a_j\|^2$, $\alpha \in (0, 1)$. Отображение $\varphi_0(x)$ является нерасширяющим, а $\varphi_\alpha(x)$ — фейеровским относительно $\tilde{M} = \operatorname{Arg\,min}\left\{\sum_{j=1}^m [l_j^+(x)]^2\colon x \geqslant 0\right\}$, в силу чего $\lim_{t\to\infty} x_t = \tilde{x} \in \tilde{M}$ при произвольном начальном $x_0 \in \mathbf{R}^n$, где $x_t = \varphi_\alpha(x_{t-1})$.

Этот метод итеративной аппроксимации системы (2.2) при некоторых дополнительных предположениях можно распространить и на систему (2.1). При выпуклости функций $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ и в предположении их дифференцируемости каждое из отображений

$$\varphi_j(x) = x - \lambda_j \frac{f_j^+(x)}{\|\nabla f_j(x)\|^2} \nabla f_j(x) \tag{2.9}$$

является непрерывным M_j-фейеровским, где $M_j = \{x: f_j(x) \leqslant 0\} \neq \varnothing$, $\lambda_j \in (0, 2)$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$. Образуем операторы

$$\psi_0(x) = P_M\left(x - \frac{\lambda}{\delta(x)} \sum_{j=1}^m f_j^+(x) \nabla f_j(x)\right), \tag{2.10}$$

и

$$\psi_\alpha(x) = (1-\alpha)\psi_0(x) + \alpha x,$$

где $\delta(x) = \sum\limits_{j=1}^m \|\nabla f_j(x)\|^2$, $0 < \lambda \leqslant \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \lambda_j$, $\alpha \in (0, 1)$.

Ниже будет показано, что в предположении нерасширяемости отображений $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ оператор $\psi_\alpha(x)$ будет $\widetilde{M}$-фейеровским, где

$$\widetilde{M} = \operatorname{Arg\,min}\left\{g(x) = \sum_{j=1}^m [f_j^+(x)]^2 : x \in M\right\} \neq \varnothing. \tag{2.11}$$

Лемма 2.1. *Для $y \in M$ и $s \in \mathbf{R}^n$ равенство $P_M(y + s) = y$ справедливо тогда и только тогда, когда $(s, x - y) \leqslant 0$ $\forall x \in M$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2.2. *Множеством неподвижных точек для $\psi_0(x)$ является $\widetilde{M}$, определенное согласно* (2.11).

Доказательство. Соотношение (2.10) можно переписать в следующем виде:

$$\psi_0(x) = P_M\left(x - \frac{\lambda}{2\delta(x)} \nabla g(x)\right). \tag{2.12}$$

Необходимым и достаточным условием включения $y \in \widetilde{M}$, т. е. оптимальности вектора y в задаче $\min\{g(x): x \in M\}$, является соотношение

$$(\nabla g(y),\ x - y) \geqslant 0 \quad \forall x \in M. \tag{2.13}$$

Докажем, что $M' = \{x\colon \psi_0(x) = x\} \subset \tilde{M}$. Пусть $y \in M'$; тогда $y \in M$, и согласно лемме 2.1 имеем $(s, x - y) \leqslant 0$ $\forall x \in M$ при $s = \frac{\lambda}{2\delta(y)} \nabla g(y)$. Если $\delta(y) \neq 0$, то из предыдущего соотношения вытекает (2.13), т. е. $y \in \tilde{M}$. Если же $\delta(y) = 0$, то $\nabla g(y) = 0$; следовательно, y — точка абсолютного минимума функции $g(x)$. Поэтому $y \in \tilde{M}$.

Убедимся в справедливости включения $\tilde{M} \subset M'$. Пусть $y \in \tilde{M}$, тогда в силу (2.13) при $s = -\frac{\lambda}{2\delta(y)} \nabla g(y)$ и $\delta(y) \neq 0$ выполняется неравенство $(s, x - y) \leqslant 0$ $\forall x \in M$. Отсюда в силу леммы 2.1 $P_M(y + s) = y$, т. е. $y \in M'$. Случай $\delta(y) = 0$, дающий $\nabla g(y) = 0$, сразу же приводит к $P_M(y) = y$, т. е. снова $y \in \tilde{M}$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Если отображения* $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$ *являются нерасширяющими и* $\tilde{M}$ *определено соотношением* (2.11), *то* $\psi_\alpha(x)$ *является непрерывным* $\tilde{M}$*-фейеровским* (*в предположении* $\tilde{M} \neq \varnothing$), *и*

$$\lim_{t \to \infty} x_t = \tilde{x} \in \tilde{M} \quad \textit{при} \quad x_t = \psi_\alpha(x_{t-1}). \tag{2.14}$$

Доказательство. Убедимся, во-первых, в свойстве нерасширяемости $\psi_0(x)$. Обозначим

$$\varphi_j^\lambda(x) = x - \lambda \frac{f_j^+(x)}{\|\nabla f_j(x)\|^2} \nabla f_j(x).$$

Непосредственно проверяется равенство

$$\varphi_j^\lambda(x) = \alpha_j \varphi_j(x) + (1 - \alpha_j)\, x$$

при $\alpha_j = \lambda/\lambda_j < 1$. Так как $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — нерасширяющие отображения, то из последнего равенства вытекает, что таковыми являются и $\varphi_j^\lambda(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Отсюда следует свойство нерасширяемости для

$$\psi'(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(x)\, \varphi_j^\lambda(x) = x - (\lambda/\delta(x)) \sum_{j=1}^m f_j^+(x) \nabla f_j(x),$$

где $\alpha_j(x) = \|\nabla f_j(x)\|^2/\delta(x)$.

Далее, так как аналогичное свойство выполняется для оператора проектирования $P_M(\cdot)$ на выпуклое множество M, то оно выполняется как для $\psi_0(x) = P_M(\psi'(x))$, так и для $\psi_\alpha(x)$.

Согласно лемме 2.2 множеством неподвижных точек для $\psi_0(x)$, а потому и для $\psi_\alpha(x)$, является $\tilde{M}$. Свойство нерасширения для $\psi_0(x)$ дает $\tilde{M}$-фейеровость отображения $\psi_\alpha(x)$. Но последнее непрерывно, поэтому (2.14) справедливо.

Замечание 2.1. Если в (2.1) функции $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ суть функции расстояния до системы выпуклых замкнутых множеств $\{M_j\}_{j=1}^m$, т. е. $f_j(x) = |x - M_j|$, то отображения (2.9) принимают вид

$$\varphi_j^0(x) = x - \lambda_j(x - P_j(x)),$$

где $P_j(\cdot)$ — оператор проектирования на M_j $(j = 1, \ldots, m)$. Отображения $\{\varphi_j^0(\cdot)\}_{j=1}^m$ являются нерасширяющими при $\lambda_j \in (0, 1]$, а потому отображение $\psi_\alpha(x)$, сконструированное из них описанным выше способом, будет непрерывным $\tilde{M}$-фейеровским. Оно имеет вид

$$\psi_\alpha(x) = (1 - \alpha) P_M\left(x - \lambda\left[x - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m P_j(x)\right]\right) + \alpha x.$$

В силу теоремы 2.1 для $\psi_\alpha(x)$ справедливо соотношение (2.14).

2.3. Условия регулярности для систем выпуклых неравенств. В предыдущем пункте мы рассмотрели некоторые общие процедуры аппроксимации несовместных систем линейных и выпуклых неравенств (превращающиеся в методы отыскания хотя бы одного решения системы в случае ее совместности). Но следует отметить, что часто задачи такой аппроксимации могут быть некорректными (в смысле Тихонова) [80], а потому процедуры для них — неустойчивыми. Это связано с таким обстоятельством, как потеря «хороших свойств» аппроксимирующей системой (2.1)*. Одним из выражений таких свойств являются условия *регулярности* для систем выпуклых неравенств. Так как их использование в дальнейшем будет довольно частым, рассмотрим некоторые из таких условий [36]. Через M^c будем обозначать множество внутренних точек выпуклого замкнутого множества M.

Условие (R): существует вектор $p \in M^c$ такой, что $f_j(p) \leqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$; при этом $f_j(p) < 0$ для нелинейных $f_j(x)$.

Условие (R_0): существует вектор $p \in M$ такой, что $f_j(p) < 0$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Если система (2.1) удовлетворяет условию (R) (или (R_0)), то назовем ее *R-регулярной* (*R_0-регулярной*).

Условия регулярности обеспечивают справедливость следующей теоремы:

Теорема Куна — Таккера. *Пусть задача ВП*

$$\max\{f_0(x):\ f_j(x)\leqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\in M\} \tag{2.15}$$

разрешима в точке $\bar{x}$, а ее система ограничений регулярна в каком-либо смысле; тогда существует вектор $\bar{u}\geqslant 0$, $\bar{u}\in \mathbf{E}_m$, такой, что

$$F(x,\bar{u})\leqslant F(\bar{x},\bar{u})\leqslant F(\bar{x},u)\quad \forall x\in M\quad \forall u\geqslant 0, \tag{2.16}$$

т. е. $[\bar{x},\bar{u}]$ — седловая точка функции Лагранжа $F(x,u)=f_0(x)-\sum\limits_{j=1}^{m}u_jf_j(x)$.

Из (2.16) вытекает, что $\bar{x}$ — оптимальное решение (2.15) (без каких-либо условий на (2.15)). Любое из условий, гарантирующих справедливость теоремы Куна — Таккера, названо в [32] (КТ)-*условием*; мы будем здесь говорить просто об условии регулярности.

Пусть $\bar{u}=[\bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_m]^T$ — вектор из (2.16). Координаты $\bar{u}_j$ называют *двойственными оценками*, отвечающими неравенствам $f_j(x)\leqslant 0$ $(j=1,\ \ldots,\ m)$ (или *оптимальными множителями Лагранжа*).

Если функции $\{f_j(x)\}_{j=1}^{m}$ линейны, а M полиэдрально, то система (2.1) также регулярна. На самом деле система (2.1) будет регулярной и в том случае, когда $\{f_j(x)\}_{j=1}^{m}$ кусочно-линейны (так как они предполагались выпуклыми, то они будут непрерывно кусочно-линейными). Таким образом, если в задаче ВП (2.15) функции $\{f_j(x)\}$ кусочно-линейны, а M полиэдрально, то из ее разрешимости следует существование двойственных оценок $\bar{u}_j$ для неравенств $f_j(x)\leqslant 0$ $(j=1,\ \ldots,\ m)$. Заметим, что условия регулярности обеспечивают сходимость фейеровских методов со скоростью геометрической прогрессии [29].

В заключении сформулируем условия оптимальности для задачи (2.15) в предположениях дифференцируемости определяющих ее функций и $M=\mathbf{E}_n^+$ (эти условия могут быть получены в (2.16)).

Пусть (2.15) — регулярная задача ВП (т. е. с регулярной системой ограничений) и $M=\mathbf{E}_n^+$. Тогда из оптимальности $\bar{x}$ вытекают условия

$$\nabla_x F(\bar{x}, \bar{u}) \leqslant 0, \quad (\bar{u}, F(\bar{x})) = 0 \tag{2.17}$$

при некотором $\bar{u} \geqslant 0$, где $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, т. е. условия (2.17) являются необходимыми. Они являются и достаточными (без предположения регулярности). Условия (2.17) могут быть переписаны в виде

$$\nabla f_0(\bar{x}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \bar{u}_j \nabla f_j(\bar{x}), \quad \bar{u}_j f_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Для задач ЛП (1.1) и (1.1)* условия оптимальности могут быть сформулированы в форме соотношения

$$[\bar{x}, \bar{u}] \in (\operatorname{Arg} L) \times (\operatorname{Arg} L^*) \Leftrightarrow [\bar{x}, \bar{u}] \in$$
$$\in (M \times M^*) \mathbin{\&} (\bar{x}, A^T\bar{u} - c) = 0 \mathbin{\&} (\bar{u}, A\bar{x} - b) = 0. \tag{2.18}$$

Условия, выраженные равенствами скалярных произведений нулю в (2.17) и (2.18), носят название условий *ортогональности* (или условий *дополняющей нежесткости*).

§ 3. Модели коррекции несобственных задач

В данном параграфе мы перечисляем некоторые типы аппроксимаций (коррекций) несобственных задач с соответствующим кратким обсуждением. Численные методы, реализующие разные подходы к коррекции, изложены в главах III и VI.

3.1. Модель прямой аппроксимации. Запишем задачу математического программирования в виде

$$C: \ \sup \{f_0(x): \ f_j(x) \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, m, \ x \geqslant 0\}. \tag{3.1}$$

Погрузим ее в семейство параметрических задач

$$\sup\{f_0[y_0](x): \ f_j[y_j](x) \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, m, \ x \geqslant 0\}; \tag{3.2}$$

здесь $\{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ — система векторных параметров, принадлежащих некоторым конечномерным пространствам. Это означает, что при определенных значениях этих параметров $\{y_0^0, y_1^0, \ldots, y_m^0\}$ справедливы неравенства $f_0[y_0^0](x) = f_0(x)$, $f_j[y_j^0](x) = f_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Полагая $y = [y_0, y_1, \ldots, y_m]$, вместо (3.2) можно использовать запись

$$C(y): \ \sup \{f_0[y](x): \ f_j[y](x) \leqslant 0, \ j = 1, \ldots, m, \ x \geqslant 0\}. \tag{3.3}$$

Приведем две формы погружения:

$$\sup\{f_0(x)-(\Delta c,\ x):\ f_j(x)\leqslant \Delta b_j,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\geqslant 0\},\quad (3.4)$$

$$\sup\{f_0(x)-\alpha\|x\|^2:\ f_j(x)\leqslant \Delta b_j,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\geqslant 0\},\quad (3.5)$$

где $\alpha>0$.

Параметрическая относительно $\Delta c\in\mathbf{R}^n$ и $\Delta b\in\mathbf{R}^m$ задача (1.12) есть результат симметрического погружения задачи (1.1).

Более общая форма погружения задачи (1.1) в класс параметрических задач реализуется следующим образом:

$$\max\{(c-\Delta c,\ x):\ (A+H)x\leqslant b+\Delta b,\ x\geqslant 0\}.\quad (3.6)$$

Пусть σ — то или иное свойство задачи C (быть разрешимой, собственной и т. д.). Для (3.3) введем множество $K_\sigma=\{y:\ C(y)$ обладает свойством $\sigma\}$. Методы прямой аппроксимации связаны с решением задачи

$$\inf\{d(y):\ y\in K_\sigma\}\quad (3.7)$$

при том или ином выборе критериальной функции $d(y)$. Приведем примеры.

Пусть σ есть свойство быть разрешимой для задачи

$$\max\{(c-\Delta c,\ x):\ Ax\leqslant b+\Delta b,\ x\geqslant 0\},$$

где $[\Delta c,\Delta b]\in\mathbf{R}_+^{n+m}$. Положим $d(\Delta c,\ \Delta b)=\|\Delta c\|_1+\|\Delta b\|_1$. В этой ситуации $K_\sigma=\{[\Delta c,\ \Delta b]\geqslant 0:\ M(\Delta b)\neq\varnothing,$ $M^*(\Delta c)=\varnothing\}$, где

$$M(\Delta b)=\{x\geqslant 0:\ Ax\leqslant b+\Delta b\},$$

$$M^*(\Delta c)=\{u\geqslant 0:\ A^Tu\geqslant c-\Delta c\}.$$

Сама задача аппроксимации (3.7) сводится к задачам ЛП:

$$\min\left\{\sum_{j=1}^m \Delta b_j:\ Ax\leqslant b+\Delta b,\ [x,\Delta b]\geqslant 0\right\},\quad (3.8)$$

$$\min\left\{\sum_{i=1}^n \Delta c_i:\ A^Tu\geqslant c-\Delta c,\ [u,\Delta c]\geqslant 0\right\}.\quad (3.9)$$

Если $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ — оптимальные решения задач (3.8) и (3.9) соответственно, то вектор $[\widetilde{\Delta c},\ \widetilde{\Delta b}]$ при $\widetilde{\Delta c}=(c-A^T\tilde{u})^+$ и $\widetilde{\Delta b}=(A\tilde{x}-b)^+$ является решением задачи (3.7), соотнесенной рассмотренному примеру.

В этом примере содержательно интересным может быть случай, когда функция $d(\Delta c, \Delta b)$ имеет несколько более общий вид, а именно:

$$d(\Delta c, \Delta b) = \sum_{j=1}^{m} R_j \Delta b_j + \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta c_i,$$

где $R_j > 0$, $r_i > 0$ $(j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n)$. Тогда аналогами задач (3.8) и (3.9), записанными в компактном виде, будут

$$\min\{(R,\ (Ax-b)^+):\ x \geqslant 0\},$$
$$\min\{(r,\ (c-A^Tu)^+):\ u \geqslant 0\},$$

где $R = [R_1, \ldots, R_m]$, $r = [r_1, \ldots, r_n]$. Последние принадлежат классу выпуклых кусочно-линейных задач математического программирования.

Рассмотрим другой пример. Пусть (1.1) — несобственная задача ЛП 2-го рода, т. е. $M \neq \varnothing$ и $M^* = \varnothing$. Этому, как уже отмечалось, отвечает несобственное оптимальное значение для (1.1). В качестве σ возьмем свойство разрешимости скорректированной по c задачи

$$\max\{(c-\Delta c,\ x):\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}.$$

Тогда $K_\sigma = \{\Delta c \geqslant 0:\ M^*(\Delta c) \neq \varnothing\}$; здесь $M^*(\Delta c) = \{u \geqslant 0:\ A^Tu \geqslant c - \Delta c\}$. Если $d(\Delta c) = \|\Delta c\|^2$, то задача (3.7) запишется так:

$$\min\{\|\Delta c\|^2:\ A^Tu \geqslant c - \Delta c,\quad [u,\ \Delta c] \geqslant 0\},$$

что эквивалентно

$$\min\{\|(c - A^Tu^+\|^2:\ u \geqslant 0\}.$$

Это — гладкая задача выпуклого кусочно-квадратичного программирования. Она может быть решена методами § 2.

3.2. Коррекция симметрической задачи ЛП. Задаче (1.12) поставим в соответствие систему неравенств

$$Ax \leqslant b + \Delta b,\qquad [x,\ \Delta b] \geqslant 0, \tag{3.10}$$
$$A^Tu \geqslant c - \Delta c,\qquad [u,\ \Delta c] \geqslant 0, \tag{3.11}$$
$$(b + \Delta b,\ u) \leqslant (c - \Delta c,\ x). \tag{3.12}$$

При фиксированных Δb и Δc задача отыскания решения системы (3.10)—(3.12) называется *симметрической* задачей, отвечающей постановке (1.12). Если

$$[\bar{x},\ \bar{u},\ \overline{\Delta c},\ \overline{\Delta b}] \tag{3.13}$$

есть некоторое решение (3.10)—(3.12), то

$$\bar{x} \in \operatorname{Arg}\max\{(c - \overline{\Delta c},\ x):\ x \in M(\overline{\Delta b})\}, \tag{3.14}$$

$$\bar{u} \in \operatorname{Arg}\min\{(b + \overline{\Delta b},\ u):\ u \in M^*(\overline{\Delta c})\}. \tag{3.15}$$

(Это простые факты из теории двойственности ЛП.) С другой стороны, система (3.10)—(3.12) всегда имеет некоторое решение (3.13).

Лемма 3.1. *Если Δb и Δc обеспечивают совместность систем* (3.10) *и* (3.11) *соответственно, то при этих же Δb и Δc система* (3.10)—(3.12) *совместна относительно x и u.*

Действительно, если $\overline{\Delta b}$ и $\overline{\Delta c}$ таковы, что (3.10) и (3.11) при $\Delta b = \overline{\Delta b}$ и $\Delta c = \overline{\Delta c}$ совместны, то взяв $\bar{x}$ и $\bar{u}$ из (3.14) и (3.15), будем иметь $(c - \overline{\Delta c},\ \bar{x}) = (b + \overline{\Delta b},\ \bar{u})$, т. е. так выбранные $\overline{\Delta b}$, $\overline{\Delta c}$, $\bar{x}$ и $\bar{u}$ удовлетворяют неравенству (3.12), а потому и системе (3.10)—(3.12) в целом. Лемма доказана.

Если $K = \{[\Delta c,\ \Delta b] \geqslant 0:\ M(\Delta b) \neq \varnothing,\ M^*(\Delta c) \neq \varnothing\}$, то в силу леммы 3.1

$$K = \{[\Delta c, \Delta b]:\ \text{система (3.10)—(3.12) совместна}\} \tag{3.16}$$

Если $d(\Delta c,\ \Delta b)$ — функция качества аппроксимации симметрической задачи, то сама задача аппроксимации запишется так:

$$H:\ \min\{d(\Delta c,\ \Delta b):\ (3.10)—(3.12)\}. \tag{3.17}$$

Согласно (3.16) получаем

$$\operatorname{Arg} H = \operatorname{Arg}\min\{d(\Delta c,\ \Delta b):\ [\Delta c,\ \Delta b] \in K\}. \tag{3.18}$$

Соотношение (3.18) показывает, что хотя решение задачи (3.17) и затруднительно (в смысле нахождения не только Δb и Δc, реализующих min в (3.17), но также x и u), однако его можно заменить на решение двух последовательных задач:

1) Найти $[\overline{\Delta c}, \overline{\Delta b}] \in \operatorname{Arg}\min\{d(\Delta c, \Delta b):\ [\Delta c,\ \Delta b] \in K\}$.
2) Найти $\bar{x}$ и $\bar{u}$ согласно (3.14) и (3.15).

В качестве $d(\Delta c,\ \Delta b)$ можно выбирать $d_i(\Delta c,\ \Delta b) = \|\Delta c\|_i + \|\Delta b\|_i$ $(i = 0,\ 1)$, $d_2(\Delta c,\ \Delta b) = \|\Delta c\|^2 + \|\Delta b\|^2$ и т. д. Если, например, $d(\cdot) = d_1(\cdot)$, то задача (3.17) эквивалентна решению двух задач:

$$\min\{\|(Ax-b)^+\|_1:\ x\geqslant 0\}, \tag{3.19}$$

$$\min\{\|(c-A^Tu)^+\|_1:\ u\geqslant 0\}, \tag{3.20}$$

которые эквивалентны (3.8) и (3.9). Если $\bar{x}$ и $\bar{u}$ — их аргументы, то $\overline{\Delta c}=(c-A^T\bar{u})^+$ и $\overline{\Delta b}=(A\bar{x}-b)^+$ — аргументы задачи (3.17). Аналогичное сведе́ние имеет место и для случая $d(\cdot)=d_2(\cdot)$.

Надо, однако, заметить, что коррекция симметрической задачи в форме (3.13) не соответствует способу коррекции несовместной системы типа (2.1), введенному вслед за этой системой. Если следовать этому способу, то мы приходим к задаче

$$\min\{d(\Delta c,\ \Delta b):\ Ax\leqslant b+\Delta b,\ \ x\geqslant 0;\ \ c-A^Tu\leqslant\Delta c,$$
$$u\geqslant 0;\ (b,\ u)-(c,\ x)\leqslant t,\ \Delta=[\Delta c,\ \Delta b,\ t]\in D\}. \tag{3.21}$$

Множество D может выбираться по-разному, например, $D=\{\Delta\geqslant 0\}$.

При $D=\{\Delta\geqslant 0\}$, $d(\Delta)=\|\Delta\|_1$ задача (3.21) эквивалентна задаче

$$\min\{g_1(x,u)=\|(Ax-b)^+\|_1+\|(c-A^Tu)^+\|_1+$$
$$+[(b,\ u)-(c,\ x)]^+:\ [x,\ u]\geqslant 0\}, \tag{3.22}$$

а при $D=\{\Delta=[\Delta c,\ \Delta b,\ t]\geqslant 0\}$, $d(\Delta)=\|\Delta\|^2$ — задаче

$$\min\{g_2(x,u)=\|(Ax-b)^+\|^2+\|(c-A^Tu)^+\|^2+$$
$$+[(b,\ u)-(c,\ x)]^2:\ [x,\ u]\geqslant 0\}. \tag{3.23}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\overline{M}$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ — множества оптимальных решений задач* (3.22), (3.19), (3.20), ν, ν_1, ν_2 — *соответствующие им оптимальные значения. Тогда*

$$\nu=\nu_1+\nu_2, \tag{3.24}$$

$$\overline{M}=\overline{M}_1\times\overline{M}_2. \tag{3.25}$$

Доказательство. Докажем равенство (3.24). Неравенство $\nu\geqslant\nu_1+\nu_2$ очевидно. Докажем обратное неравенство. Пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{u}$ определены из условий $\nu_1=\|(A\tilde{x}-b)^+\|_1$ и $\nu_2=\|(c-A^T\tilde{u})^+\|_1$. Полагая $\widetilde{\Delta b}=(A\tilde{x}-b)^+$, $\widetilde{\Delta c}=(c-A^T\tilde{u})^+$, можно указать $\bar{x}$, $\bar{u}$ такие, что

$$\|\widetilde{\Delta b}\|_1=\|(A\bar{x}-b)^+\|_1,\quad \|\widetilde{\Delta c}\|_1=\|(c-A^T\bar{u})^+\|_1,$$
$$(b+\widetilde{\Delta b},\ \bar{u})=(c-\widetilde{\Delta c},\ \bar{x})$$

(по теореме двойственности в ЛП). Отсюда следует $(b, \bar{u}) - (c, \bar{x}) = -[(\widetilde{\Delta b}, \bar{u}) + (\widetilde{\Delta c}, \bar{x})] \leqslant 0$, т. е. $[(b, \bar{u}) - (c, \bar{x})]^+ = 0$. Таким образом, имеем $\nu_1 + \nu_2 = \|(A\bar{x} - b)^+\|_1 + \|(c - A^T\bar{u})^+\|_1 + [(b, \bar{u}) - (c, \bar{x})]^+ = g_1(\bar{x}, \bar{u}) \geqslant \nu$, а потому (3.24) верно.

Пусть теперь $[\bar{x}, \bar{u}] \in \overline{M}$, т. е. $\min\{g_1(x, u)\colon [x, u] \geqslant 0\} = g_1(\bar{x}, \bar{u})$. Согласно (3.24) $g_1(\bar{x}, \bar{u}) = \nu_1 + \nu_2$. Так как $g_1(\bar{x}, \bar{u}) = \|(A\bar{x} - b)^+\|_1 + \|(c - A^T\bar{u})^+\|_1 + [(b, \bar{u}) - (c, \bar{x})]^+$ и первые два слагаемых не меньше, чем ν_1 и ν_2 соответственно, то отсюда следует $\nu_1 = \|(A\bar{x} - b)^+\|_1$ и $\nu_2 = \|(c - A^T\bar{u})^+\|_1$, т. е. $\bar{x} \in \overline{M}_1$ и $\bar{u} \in \overline{M}_2$.

Следствие 3.1. *Если* $[\bar{x}, \bar{u}] \in \overline{M}$, *то*

$$|(b, \bar{u}) - (c, \bar{x})| \leqslant ((c - A^T\bar{u})^+, \bar{x}) + ((A\bar{x} - b)^+, \bar{u}).$$

Теорема 3.2. *Если* $[\bar{x}, \bar{u}]$ — *оптимальное решение задачи* (3.23), *то справедливо соотношение*

$$[(b, \bar{u}) - (c, \bar{x})]^2 = \|(A\bar{x} - b)^+\|^2 + \|(c - A^T\bar{u})^+\|^2 + \\ + ((A\bar{x} - b)^+, b) - ((c - A^T\bar{u})^+, c).$$

Доказательство. Функция $g_2(x, u)$ является дифференцируемой, поэтому условия оптимальности для (3.23) имеют простой вид:

$$\sum_{j=1}^{m} l_j^+(\bar{x})\, a_j + \Delta(\bar{x}, \bar{u})\, c \geqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^+(\bar{u})\, h_i + \Delta(\bar{x}, \bar{u})\, b \leqslant 0;$$

скалярные произведения левых частей выписанных неравенств на $\bar{x}$ и $\bar{u}$ соответственно равны нулю (условия *дополняющей нежесткости*). Выше $\{a_j\}_{j=1}^m$ — строки матрицы A, $\{h_i\}_{i=1}^n$ — ее столбцы, $l_j(x) = (a_j, x) - b_j$, $h_i(u) = c_i - (h_i, u)$, $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$, $c = [c_1, \ldots, c_n]^T$, $\Delta(x, u) = (c, x) - (b, u)$. Из условий дополняющей нежесткости

$$\Delta^2(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{j=1}^{m} l_j^+(\bar{x})(a_j, \bar{x}) - \sum_{i=1}^{n} h_i^+(\bar{u})(h_i, \bar{u}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} l_j^{+^2}(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} l_j^+(\bar{x})\, b_j + \sum_{i=1}^{n} h_i^{+^2}(\bar{u}) - \sum_{i=1}^{n} h_i^+(\bar{u})\, c_i =$$

$$= \|(A\bar{x} - b)^+\|^2 + \|(c - A^T\bar{u})^+\|^2 + \\ + ((A\bar{x} - b)^+, b) - ((c - A^T\bar{u})^+, c),$$

что и требовалось.

3.3. Метод ранжирования ограничений. Предположим, что несовместная система ограничений задачи (3.1) разбита на две группы:

$$f_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, j_0, \quad x \geqslant 0; \tag{3.26}$$

$$f_j(x) \leqslant 0, \quad j = j_0 + 1, \ldots, m. \tag{3.27}$$

Ограничения первой группы будем считать обязательными (*директивными*), второй группы — *факультативными*. При этом предполагается, что множество M решений системы (3.26) непусто.

Содержательный смысл ранжирования системы ограничений допускает подход к анализу задачи (3.1) на основе сведения ее к двухступенчатой задаче оптимизации, т. е. к задаче

$$\sup \{f_0(x)\colon x \in \widetilde{M}\}, \tag{3.28}$$

$$\widetilde{M} = \operatorname{Arg\,inf} \left\{ \sum_{j>j_0} v_j f_j^+ (x)\colon x \in M \right\}, \tag{3.29}$$

где $M = \{x \geqslant 0\colon f_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, j_0\}$, $v_j > 0 \ \forall j > j_0$.

Задаче (3.28) можно поставить в соответствие задачу

$$\sup \left\{ f_0(x) - v_0 \sum_{j>j_0} v_j f_j^+ (x)\colon x \in M \right\}. \tag{3.30}$$

При определенных условиях (3.28) и (3.30) эквивалентны. Заметим, что выбором констант $v_j > 0$ (ранговых весов) можно ввести упорядочение по предпочтительности и в ограничения (3.27). С анализом задач (3.28) и (3.30) мы встретимся в § 3 и в гл. II.

3.4. Методы дискретной аппроксимации. Для несовместных систем неравенств существует некоторое обобщение понятия решения — понятие комитета. *Комитетом* называется конечная совокупность векторов (членов комитета) такая, что каждое из неравенств системы удовлетворяется более чем половиной членов комитета.

Пусть $\Omega = \{\sigma\}$ — некоторое множество комитетов системы неравенств в задаче (3.1), а $g(\sigma)$ — функция, оценивающая комитет σ по критериальной функции $f_0(x)$; тогда мы приходим к задаче

$$\sup \{g(\sigma)\colon \sigma \in \Omega\}. \tag{3.31}$$

Если Ω — множество комитетов, состоящих из одинакового числа членов q, то функция $g(\sigma)$ может иметь вид

$$g(\sigma)=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i f_0(x^i), \tag{3.32}$$

где $\sigma=[x^1,\ldots,x^q]$, $x^i\in\mathbf{R}^n$, $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i=1$ ($i=1,\ldots,q$). В частности, если система совместна, то комитетом является любое ее решение x; тогда функция $g(\sigma)$ принимает вид $f_0(x)$, т. е. (3.31) совпадает с задачей (3.1).

Комитетные конструкции в вопросах дискретной аппроксимации несобственных задач в алгоритмическом плане связаны с выбором максимально совместных подсистем несовместных систем ограничений. Поэтому комитетный подход можно связать с моделью оптимизации на *покрытиях*, т. е. на совместных подсистемах, в объединении дающих всю систему ограничений оптимизационной задачи.

Пусть

$$g_j(x)\leqslant 0,\quad j=1,\ldots,m, \tag{3.33}$$

— произвольная система неравенств, $\mathbf{N}_m=\bigcup_{i=1}^{s}J_i$ — произвольное разбиение множества ее индексов; при этом пересечения $J_i\cap J_j$ могут быть и непусты. Ему соответствует разбиение системы (3.33) на подсистемы

$$g_j(x)\leqslant 0,\quad j\in J_i,\quad i=1,\ldots,s. \tag{3.34}$$

Совокупность подсистем (3.34) назовем *покрытием* системы (3.33). Покрытие назовем *совместным*, если все подсистемы (3.31) совместны. Примером совместного покрытия может служить разбиение системы на максимально совместные подсистемы (МСП-покрытие) (см. гл. III).

Пусть π — некоторое совместное покрытие системы (3.33), M_i — множество решений системы (3.34), $x^i\in M_i$ ($i=1,\ldots,s$). Вектор $\sigma=[x^1,\ldots,x^s]$ назовем *π-решением* системы (3.33). Обозначив через Ω множество всех π-решений, можно по аналогии с (3.31), (3.32) рассмотреть задачу

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i f_0(x^i):\ [x^1,\ldots,x^s]\in\Omega\right\}, \tag{3.35}$$

где $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, s)$, f_0 (x) — некоторая функция. Частными реализациями задачи (3.35) являются задачи

$$\sup\{f_0(x)\colon\ x \in M_i\}, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{3.36}$$

Может оказаться содержательно оправданным искать оптимальное решение $\tilde{x}(i)$ для каждой из задач (3.36), а решение $\tilde{x}$ несовместной задачи $\sup\{f_0(x)\colon\ g_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, m\}$ конструировать из уже найденных $\tilde{x}(i)$. При этом само конструирование может носить оптимизационный характер, например, можно положить

$$\tilde{x} \in \operatorname{Arg\,min}\left\{\sum_{j=1}^{m} g_j^+\left(\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\tilde{x}(i)\right)\colon\ \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{s}\alpha_i = 1\right\}.$$

Смысл этой конструкции достаточно очевиден.

§ 4. Принцип двойственности для несобственных задач математического программирования

Выпишем задачу (3.1), т. е. задачу

$$C\colon\ \sup\{f_0(x)\colon\ f_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\ x \geqslant 0\}. \tag{4.1}$$

В случае ее разрешимости она эквивалентна

$$\sup_{x \geqslant 0}\inf_{u \geqslant 0} F(x, u) \tag{4.2}$$

в том смысле, что множества оптимальных решений задач (4.1) и (4.2) совпадают, а их оптимальные значения равны. Под двойственной к C (в случае ее разрешимости) понимают задачу

$$C^*\colon\ \inf_{u \geqslant 0}\sup_{x \geqslant 0} F(x, u). \tag{4.1*}$$

Теорема двойственности (при тех или иных предположениях) состоит в равенстве оптимальных значений задач (4.1) и (4.1)*. Это равенство для задач ВП доказывается обычно в предположениях, носящих название условий регулярности (см. § 2).

Формально постановку (4.2) можно рассматривать для любой задачи (4.1), т. е. без предположений собственности. Однако, если, например, система ограничений в задаче (4.1) несовместна, то оптимальное значение (4.2) является несобственным числом, а именно, $-\infty$. В случае же, если оптимальное значение (4.1) равно $+\infty$, то оптимальное значение (4.2) также будет равно $+\infty$. Это показывает, что по крайней мере для рассмотренных случаев несобственности задачи (4.1), постановка (4.2), эквивалентная (4.1) в случае ее разрешимости, ничего полезного не дает в смысле анализа исходной задачи. Это же можно сказать и в отношении задачи (4.1)*. Следовательно, в ситуации несобственных задач требуется иной подход к формулировке как принципа двойственности, так и соответствующих ему теорем двойственности.

Сразу же отметим, что двойственность для несобственных задач математического программирования не может не исходить из потребности аппроксимаций таких задач. С другой стороны, к ней можно предъявить требования не только обобщения канонической формы двойственности, но и обогащения ее с сохранением, скажем, для задач ЛП, свойства взаимности, т. е. свойства $(L^*)^* = L$. Программу построения теории двойственности для несобственных задач можно было бы охарактеризовать так.

Задачам C и C^* по некоторой единой схеме π ставятся в соответствие собственные задачи $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^\#$, для которых выполняется теорема двойственности, при этом $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^\#$ выступают в роли аппроксимирующих задач для C и C^*; в случае задачи линейного программирования L выполняется свойство взаимности: $(\mathscr{D}^\#)^\# = \mathscr{D}$.

Роль принципа двойственности и теорем, ее характеризующих, в математическом программировании (в частности, в линейном и выпуклом) велика. Эта роль подчеркивается не только тем, что двойственность является сердцевиной теории математического программирования, но и тем, что она порождает или может быть использована в генерировании большого числа методов решения задач условной оптимизации. В анализе несобственных задач роль двойственности даже возрастает, так как в этом случае усложняется и численный анализ задач.

4.1. Иллюстративный пример двойственности для несобственных задач ЛП. Задачам L и L^* поставим в соответствие задачи

$$\mathscr{D}_l\colon \max\ \{(c, x) - (R, (Ax - b)^+)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant r\},$$
$$\mathscr{D}_l^\#\colon \min\ \{(b, u) + (r, (c - A^T u)^+)\colon\ 0 \leqslant u \leqslant R\},$$

здесь $R = [R_1, \ldots, R_m] \geqslant 0$, $r = [r_1, \ldots, r_n] \geqslant 0$. Задачи $\mathscr{D}_l$

и $\mathcal{D}_l^{\#}$ являются задачами выпуклого кусочно-линейного программирования. Они получены из L и L^* по единой схеме. Задачи $\mathcal{D}_l$ и $\mathcal{D}_l^{\#}$ всегда разрешимы, при этом

$$\operatorname{opt} \mathcal{D}_l = \operatorname{opt} \mathcal{D}_l^{\#}.$$

Кроме того, можно утверждать, что при фиксированном r существует вектор $\bar{R} \geqslant 0$ такой, что для всех $R = t\bar{R}$, $t > 1$,

$$\operatorname{Arg} \mathcal{D}_l = \operatorname{Arg} \max \{(c, x):\ x \in \tilde{M}\},$$

где $\tilde{M} = \operatorname{Arg} \min \{(\bar{R},\ (Ax - b)^+):\ 0 \leqslant x \leqslant r\}$. Это утверждение проясняет аппроксимационный смысл задачи $\mathcal{D}_l$ по отношению к L. С этой же точки зрения можно рассмотреть и задачу $\mathcal{D}_l^{\#}$.

Сразу же оговоримся, что взаимная двойственность задач $\mathcal{D}_l$ и $\mathcal{D}_l^{\#}$ является весьма частным проявлением более общей схемы двойственности, приспособленной для несобственных задач ЛП.

Задачам $\mathcal{D}_l$ и $\mathcal{D}_l^{\#}$ можно поставить в соответствие систему неравенств:

$$(b,\ u) - (c,\ x) + (r,\ (c - A^{\mathrm{T}}u)^+) + (R,\ (Ax - b)^+) \leqslant 0, \tag{4.3}$$
$$0 \leqslant x \leqslant r, \quad 0 \leqslant u \leqslant R.$$

Эта система всегда совместна, при этом если $[\bar{x},\ \bar{u}]$ — некоторое ее решение, то $\bar{x} \in \operatorname{Arg} \mathcal{D}_l, \bar{u} \in \operatorname{Arg} \mathcal{D}_l^{\#}$. В линейном программировании аналог этого факта состоит в том, что если задача ЛП (1.1) разрешима, то система неравенств

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0; \qquad A^{\mathrm{T}}u \geqslant c, \quad u \geqslant 0;$$
$$(b,\ u) \leqslant (c,\ x)$$

разрешима (совместна), причем если $[\bar{x},\ \bar{u}]$ — некоторое ее решение, то $\bar{x}$ и $\bar{u}$ — решения задач (1.1) и (1.1)* соответственно. Для линейного программирования это факт фундаментальной важности. Сводимость многих вопросов анализа несобственных задач ЛП к решению системы (4.3) является также весьма важной.

4.2. Об общей схеме двойственности для несобственных задач математического программирования. Выше по задаче L была сформирована задача $\mathcal{D}_l$, по этой же схеме из L^* формируется $\mathcal{D}_l^{\#}$. Если же исходная задача не является линейной, то воспользоваться одинаковой схемой формирования аналогов задач $\mathscr{D}_l$ и $\mathscr{D}_l^{\#}$ не удается. Скажем, для задачи (4.1) аналогом задачи $\mathscr{D}_l$ будет

$$\mathscr{D}\colon \sup\left\{f_0(x)-\sum_{j=1}^{m} R_j f_j^{+}\ (x)\colon\ 0\leqslant x\leqslant r\right\}.$$

Однако построение задачи $\mathscr{D}^{\#}$ — аналога задачи $\mathscr{D}_l^{\#}$ по прежней схеме невозможно. Выход из положения подсказывает следующий важный факт.

Заметим, что $\mathscr{D}$ эквивалентна задаче

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant r}\ \inf_{0\leqslant u\leqslant R}\ F(x,u).$$

Но тогда под задачей, двойственной к $\mathscr{D}$, следует естественным образом понимать задачу

$$\mathscr{D}^{\#}\colon\quad \inf_{0\leqslant u\leqslant R}\ \sup_{0\leqslant x\leqslant r}\ F(x,u). \tag{4.4}$$

Оказывается, что при $C=L$ справедливо и $\mathscr{D}^{\#}=\mathscr{D}_l^{\#}$, т. е. эквивалентность задачи (4.4) задаче $\mathscr{D}_l^{\#}$.

Сказанное выше является опять-таки лишь иллюстрацией общей схемы формирования двойственности для произвольных (собственных и несобственных) задач математического программирования. Общая же схема, ее анализ, формулировка теорем двойственности, выяснение их аппроксимационного смысла находят свое отражение в главе II.

§ 5. Двухступенчатая коррекция несобственных задач математического программирования

Пусть $f_0(x)$, $f(x)$ — упорядоченная пара функций, M — некоторое выпуклое множество из $\mathbf{E}_n$. Определим задачу

$$\max\{f_0(x)\colon\ x\in\hat{M}\}, \tag{5.1}$$

где $\hat{M}=\operatorname{Arg\,min}\{f(x)\colon\ x\in M\}$. Задачу (5.1) назовем *двухступенчатой* задачей оптимизации по системе функций $f_0(x)$ и $f(x)$ на множестве M. Применимость таких моделей весьма широкая. Приведем пример.

Пусть имеется некоторая многокритериальная модель математического программирования с системой критериальных функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, …, $f_s(x)$ и допустимым множеством $M\subset\mathbf{E}_n$. Предположим, что модель наделена содержательным смыслом, в силу которого каждой из критериальных функций желательно придать (при некотором $x \in M$) как можно большее значение. Этим, естественно, еще не определяется корректным образом постановка математической задачи оптимизации. В основу точной постановки могут быть положены разные принципы и подходы. Реализуем подход, связанный с идеей сводимости к двухступенчатой задаче оптимизации.

Желательность обеспечения для $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, s)$ некоторых заранее заданных значений f_i^* («рекордов», в качестве которых могут быть взяты числа $\sup\limits_{x \in M} f_i(x)$) можно учесть системой неравенств

$$f_i(x) \geqslant f_i^*, \quad i = 1, \ldots, s, \quad x \in M. \tag{5.2}$$

Однако эта система может оказаться несовместной, а соответствующая задача оптимизации — несобственной. Тогда ей можно поставить в соответствие двухступенчатую задачу оптимизации

$$\max \{f_0(x) \colon x \in \tilde{M}_r\},$$

где

$$\tilde{M}_r = \operatorname{Arg} \min_{x \in M} \max_{1 \leqslant i \leqslant s} [f_i^* - f_i(x)]^+,$$

$r_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$,— «весовые» множители. Если для $r = [r_1, \ldots, r_s]$ имеется *зона безразличия*, т. е. такое множество $B \subset \mathbf{R}^s$, что любые r' и r'' из B не связаны соотношением предпочтения, то можно $\tilde{r}$ из B выбирать, исходя из требования максимизации $\tilde{f}_r$ при $r \in B$.

Рассмотрим вместо (4.1) задачу более общую (в ее формальной записи), а именно

$$\sup \{f_0(x) \colon f_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad x \in M\}, \tag{5.3}$$

предположив ее несобственной (за счет несовместности системы ограничений) задачей выпуклого программирования. Один из подходов анализа этой задачи (см. § 3) приводит к программе

$$\max \{f_0(x) \colon x \in \tilde{M}\}, \tag{5.4}$$

где $\tilde{M}$ — оптимальное множество задачи

$$\min \{f(x) \colon x \in M\} \tag{5.5}$$

при $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} v_j f_j^+(x)$, $v_j > 0$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$. Так как $\tilde{M} =$

$= M \cap \{x\colon f(x) \leqslant \underset{\sim}{f}\}$, где $\underset{\sim}{f}$ — оптимальное значение задачи (5.5), то задачу (5.4) можно переписать в виде

$$\max\{f_0(x)\colon f(x) \leqslant \underset{\sim}{f},\quad x \in M\}. \tag{5.6}$$

Может быть сформулирована следующая

Теорема 5.1 [32]. *Если задача* (5.4) (*или* (5.6) — *что одно и то же*) *разрешима и регулярна, то при* $r > \bar{u}$ *она эквивалентна* (*в смысле совпадения оптимальных множеств*) *задаче*

$$\max\{f_0(x) - rf(x)\colon x \in M\}, \tag{5.7}$$

где $\bar{u}$ — *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $f(x) \leqslant \underset{\sim}{f}$ *в* (5.6).

Замечание 5.1. Если в (5.3) функции $\{f_j(x)\}_{j=1}^m$ кусочно-линейны, а M полиэдрально, то в сформулированной теореме условие регулярности становится излишним.

Приведенная теорема может без труда быть переформулирована применительно к задаче (4.1), если положить, например, $M = \{x \geqslant 0\colon f_j(x) \leqslant 0\ \forall j \in J_1\}$, $f(x) = \sum\limits_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)$, $J_0 \cup J_1 = \mathbf{N}_m$. Тогда задача (5.7) запишется в виде

$$\max\left\{f_0(x) - r\sum_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)\colon f_i(x) \leqslant 0\quad \forall i \in J_1,\ x \geqslant 0\right\}.$$

5.1. Применение теоремы 5.1 к анализу задачи (4.1). Нами уже был описан подход к коррекции несобственной задачи на основе выделения главных (директивных) ограничений и сведения ее к двухступенчатой задаче оптимизации. Мы дадим здесь формальный анализ такой редукции.

Пусть система ограничений задачи (4.1) разбита на две группы: $f_j(x) \leqslant 0$, $j \in J_0$ — факультативные ограничения; $f_i(x) \leqslant 0$, $i \in J_1$ — директивные ограничения. Можно допустить вхождение каких-либо неравенств в обе группы, т. е. возможно $J_0 \cap J_1 \neq \varnothing$. Для определенности можно положить $J_0 = \{1, \ldots, j_0\}$. Обозначим $M = \{x \geqslant 0\colon f_i(x) \leqslant 0\quad \forall i \in J_1\}$. С помощью выпуклой функции невязки $d(z_1, \ldots, z_{j_0})$ можно сформировать функцию $f(x) = d\left(f_1^+(x), \ldots, f_{j_0}^+(x)\right)$, которая при выпуклости функций $\{f_j(x)\}_{j=1}^{j_0}$ сама будет выпуклой.

Введем задачи

$$\max\{f_0(x):\ x\in\tilde{M}\},\tag{5.8}$$

где $\tilde{M}=\operatorname{Arg}\min\{f(x):\ x\in M\}$, и

$$C_r:\ \max\{f_0(x)-rf(x):\ x\in M\}.\tag{5.9}$$

Они суть задачи (5.4) и (5.7), однако в них уточнены конструкции функции $f(x)$ и множества M на основе постановки исходной задачи в форме (4.1).

Укажем формулировку теоремы 5.1 для рассматриваемого случая.

Теорема 5.2. *При разрешимости и регулярности задачи* (5.8) *обеспечивается эквивалентность ее задаче* (5.9) *при достаточно большом* $r>0$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что в формулировке теоремы 5.2 разрешимость задачи (5.8) постулируется, а уже отсюда выводится разрешимость задачи (5.9). Так как последняя выступает в качестве аппроксимирующей для (4.1), то возникает самостоятельный вопрос об условиях разрешимости именно задачи (5.9). Для случая, когда (4.1) — задача ЛП, этот вопрос полностью решается на основе теории двойственности для несобственных задач ЛП (см. § 7).

Ниже будут рассмотрены некоторые достаточные условия разрешимости задачи (5.9) в предположении, что функция $f(x)$ имеет вид $\sum\limits_{j\in J_0} v_j f_j^+(x)$.

5.2. Условия разрешимости задачи (5.9). Введем для ограничений задачи (4.1) θ-*условие*: при некоторых b_j^0 $(j\in J_0)$ множество

$$M(b^0)=\{x\in M:\ f_j(x)\leqslant b_j^0\quad \forall j\in J_0\}$$

непусто и ограничено; здесь $M=\{x\geqslant 0:\ f_j(x)\leqslant 0\ \forall j\in J_1\}\neq\varnothing$. Заметим, что θ-условие влечет ограниченность множества $M(b)$ всякий раз, когда $M(b)\neq\varnothing$.

Лемма 5.1. *Пусть задача выпуклого программирования*

$$C:\ \max\{g(x):\ x\in M\}$$

разрешима, и ее оптимальное множество ограничено. Тогда любая задача выпуклого программирования

$$C^1:\ \max\{g^1(x):\ x\in M^1\},$$

для которой $M^1 \subset M$ и $g(x) \geqslant g^1(x)$ $\forall x \in M$, будет иметь непустое и ограниченное оптимальное множество.

Доказательство. Во-первых, отметим хорошо известное утверждение: если при некотором $\alpha \in \mathbf{R}$ множество $S = M \cap \{x\colon f(x) \geqslant \alpha\}$ непусто и ограничено, то задача C разрешима, и ее оптимальное множество ограничено; обратно, если оптимальное множество задачи C непусто и ограничено, то при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ множество S либо пусто, либо ограничено.

Пусть α таково, что $S \neq \varnothing$; тогда это множество ограничено, а потому ограничено (в случае непустоты) и множество $M^1 \cap \{x\colon g(x) \geqslant \alpha\}$. В силу свойства $g(x) \geqslant g^1(x)$ $\forall x \in M$, множество $M^1 \cap \{x\colon g^1(x) \geqslant \alpha\}$ также ограничено, что влечет (в силу высказанного утверждения) разрешимость задачи C^1 и ограниченность ее оптимального множества.

Лемма 5.2. *Пусть $v_j > 0$ $\forall j \in J_0$, $M \neq \varnothing$. Тогда из θ-условия для (4.1) следует разрешимость задачи*

$$\min\left\{f(x) = \sum_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)\colon\ x \in M\right\}, \tag{5.10}$$

при этом оптимальное множество последней ограничено.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$ таково, что $S_\alpha = \{x \in M\colon f(x) \leqslant \alpha\} \neq \varnothing$. Докажем ограниченность этого множества. Для $x \in S_\alpha$ и $j \in J_0$ имеем:

$$f_j^+(x) \leqslant \frac{1}{v_j} \sum_{i \in J_0} v_i f_i^+(x) \leqslant \frac{\alpha}{v_j},$$

т. е. $x \in M(b)$ при $b = \left[\alpha/v_1, \ \ldots, \alpha/v_{j_0}\right]$, следовательно, $S_\alpha \subset M(b)$. В силу замечания к определению θ-условия $M(b)$ ограничено, а потому ограничено и S_α. Так как задача (5.10) эквивалентна задаче

$$\min\{\alpha\colon\ x \in M, \quad f(x) \leqslant \alpha\},$$

то из ограниченности S_α непустота и ограниченность оптимального множества задачи (5.10) следует тривиальным образом.

Замечание 5.2. θ-условие не влечет, вообще говоря, разрешимости задачи (5.9) при $f(x) = \sum\limits_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)$, т. е. задачи

$$\max\left\{f_0(x) - r \sum_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)\colon\ x \in M\right\}, \qquad r > 0. \tag{5.11}$$

Пример. Пусть $x \in \mathbf{R}^1$, $J_0 = \{1\}$, $v_1 = 1$, $r > 0$, $f_1(x) = x$, $M = \{x \geqslant 0\}$. В этой ситуации θ-условие, естественно, выполняется. В качестве $f_0(x)$ возьмем $(r+1)x$. Тогда $f_0(x) - rf(x) = (r+1)x - rx^+$, поэтому $\sup\{(r+1)x - rx^+ : x \geqslant 0\} = \sup\{x : x \geqslant 0\} = +\infty$, т. е. задача (5.11) неразрешима.

Однако надо заметить, что в данном примере по фиксированному $r > 0$ мы построили функцию $f_0(x)$, обеспечив неразрешимость задачи. Если же $f_0(x)$ зафиксировать, то при достаточно большом r и условии регулярности для (4.1) задача (5.11) будет разрешимой, более того, эквивалентной задаче (4.1). Но нас интересует случай несовместности ограничений задачи (4.1). Возникает вопрос, обеспечивается ли при достаточно большом r разрешимость задачи (5.11) именно в этом случае? На него отвечает

Теорема 5.3. *При достаточно большом r из θ-условия вытекает разрешимость задачи* (5.11) *и ограниченность ее оптимального множества.*

Доказательство. Выберем числа b_j $(j = 1, \ldots, m)$ так, чтобы система неравенств $f_j(x) < b_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, $x \geqslant 0$ была разрешимой; тогда допустимое множество задачи

$$\max\{f_0(x) : f_j(x) \leqslant b_j \quad (j = 1, \ldots, m), \quad x \geqslant 0\} \tag{5.12}$$

будет в силу θ-условия ограниченным, а сама задача — регулярной. Согласно теореме 5.2, при достаточно большом r задача (5.12) будет эквивалентна задаче

$$\max\left\{f_0(x) - r \sum_{j \in J_0} v_j [f_j(x) - b_j]^+ : f_j(x) \leqslant b_j \ \forall j \in J_1, x \geqslant 0\right\};$$

следовательно, у последней оптимальное множество непусто и ограничено. Но тогда согласно лемме 5.1 непустым и ограниченным оптимальным множеством будет обладать и задача

$$\max\left\{f_0(x) - r \sum_{j \in J_0} v_j [f_j(x) - b_j]^+ : x \in M\right\},$$

$$M = \{x \geqslant 0 : f_j(x) \leqslant 0 \quad \forall j \in J_1\}.$$

Но так как выполняется неравенство

$$f_0(x) - r \sum_{j \in J_0} v_j [f_j(x) - b_j]^+ \geqslant f_0(x) - r \sum_{j \in J_0} v_j f_j^+(x),$$

то отсюда в силу той же леммы будет следовать доказываемое утверждение.

Итак, выше было показано, что хотя θ-условие и выполнено, однако не при всяком $r>0$ задача (5.11) разрешима. Но, если, кроме того, еще выполнено условие

$$\sup\{f_0(x):\ x\in M\}=\gamma<+\infty, \tag{5.13}$$

то справедлива

Теорема 5.4. *Если для системы ограничений задачи* (4.1) *выполнено θ-условие, кроме того, имеет место неравенство* (5.13), *то задача* (5.11) *разрешима при любом $r>0$, причем ее оптимальное множество ограничено.*

Доказательство. Система неравенств $-f_0(x)+$ $+\gamma\leqslant 0$, $f_j(x)\leqslant 0$ $(j=1,\ \ldots,\ m)$ удовлетворяет, очевидно, θ-условию, поэтому в силу леммы 5.2 задача

$$\min\left\{(-f_0(x)+\gamma)^+ + r\sum_{j\in J_0} v_j f_j^+(x):\ x\in M\right\} \tag{5.14}$$

разрешима, и ее оптимальное множество ограничено. Но так как $f_0(x)\leqslant\gamma$ $\forall x\in M$, то (5.14) эквивалентна задаче

$$\min\left\{-f_0(x)+r\sum_{j\in J_0} v_j f_j^+(x):\ x\in M\right\}$$

в смысле совпадения их оптимальных множеств. Отсюда следует требуемое утверждение.

Замечание 5.3. В теореме 5.4 условие (5.13) не является необходимым.

Пример. Пусть $x\in\mathbf{R}^1$, $J_0=\{1\}$, $J_1=\{2\}$, $f_0(x)=$ $=f_1(x)=x$, $f_2(x)=-x$, $v_1=1$, $r=2$. Тогда $\sup\{x:\ x\geqslant$ $\geqslant 0\}=+\infty$, вместе с тем $\max\{f_0(x)-rf_1^+(x):\ f_2(x)\leqslant 0,$ $x\geqslant 0\}=\max\{x-2x:\ x\geqslant 0\}=0$; при этом оптимальное множество последней задачи состоит из единственного элемента 0.

Замечание 5.4. В теоремах 5.3 и 5.4, а также в лемме 5.2 функцию $f(x)=\sum_{j\in J_0} v_j f_j^+(x)$ можно заменить на $f(x)=\max_{j\in J_0} v_j f_j^+(x)$, не нарушая справедливости соответствующих утверждений, а равным образом и замечаний к ним.

Остановимся на связях между задачами (5.8) и (5.9), когда $f(x)=\sum_{j\in J_0} v_j f_j^{+2}(x)$. Здесь возможны различные формулировки теорем, характеризующих эту связь. Остановимся на одной из них.

Пусть задача (5.8) при $f(x) = \sum_{j\in J_0} v_j f_j^{+2}(x)$ разрешима и $\bar{x}$ — ее оптимальное решение. Тогда вектор $g = \left[v_1 f_1^+(\bar{x}), \ldots, v_{j_0} f_{j_0}^+(\bar{x})\right]$ определяется однозначно, независимо от $\bar{x}$. Это следует из того, что g реализует проекцию нуля из $\mathbf{R}^{j_0}$ на выпуклое множество $Y = \{[\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0}]: M \cap N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0}) \neq \varnothing\}$, где $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j_0}) = \{x: v_j f_j(x) \leqslant \alpha_j,\ j = 1, \ldots, j_0\}$. Проекция же элемента на выпуклое множество в $\mathbf{R}^{j_0}$ определяется однозначно. Положим $v_j f_j^+(\bar{x}) = \tilde{f}_j$, $j = 1, \ldots, j_0$. Тогда

$$\tilde{M} = \{x \in M: v_j f_j(x) \leqslant \tilde{f}_j, \quad j = 1, \ldots, j_0\}. \tag{5.15}$$

Лемма 5.3. *Пусть M — выпуклое множество и $\{g_i(x)\}_{i=1}^{s}$ — выпуклые функции,*

$$\tilde{x} \in \operatorname{Arg}\min_{x\in M} \sum_{i=1}^{s} g_i^{+2}(x).$$

Тогда

$$\tilde{x} \in \operatorname{Arg}\min_{x\in M} \sum_{i=1}^{s} g_i^{+}(\tilde{x}) g_i(x).$$

Доказательство. Из условий леммы и условий оптимальности в выпуклом программировании следует

$$\sum_{i=1}^{s} g_i^{+}(\tilde{x}) h_i = -\alpha h_0, \quad \left(\sum_{i=1}^{s} g_i^{+}(\tilde{x}) h_i, \tilde{x}\right) = 0;$$

здесь $h_i \in \partial g_i(\tilde{x})$, $\alpha \geqslant 0$; $(h_0, x - \tilde{x}) \leqslant 0$ $\forall x \in M$. Отсюда для $x \in M$ получаем:

$$0 \leqslant -\alpha(h_0, x - \tilde{x}) = \left(\sum_{i=1}^{s} g_i^{+}(\tilde{x}) h_i, x - \tilde{x}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{s} g_i^{+}(\tilde{x})[g_i(x) - g_i(\tilde{x})] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{s} g_i^{+}(\tilde{x}) g_i^{+}(x) - \sum_{i=1}^{s} g_i^{+2}(\tilde{x});$$

следовательно, доказываемое соотношение верно.

Теорема 5.5. *Пусть задача*

$$\max\{f_0(x):\ x\in \tilde{M}\} \tag{5.16}$$

разрешима и регулярна, $\tilde{f}_0$ — ее оптимальное значение, $\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^{j_0}$ — двойственные оценки ограничений $v_j f_j(x)\leqslant \tilde{f}_j$ $(j=1,\ \ldots,\ j_0)$. Тогда

$$\tilde{f}_0 - rE \leqslant \sup_{x\in M}\{f_0(x) - rf(x)\} \leqslant \tilde{f}_0 - rE + \frac{\|\tilde{u}\|^2}{4r}; \tag{5.17}$$

здесь $r>0,\ \ E=\min\limits_{x\in M} f(x),\ f(x)=\sum\limits_{j\in J_0} v_j f_j^{+2}(x).$

Доказательство. Чтобы не загромождать выкладок, положим $v_j=1$ $\forall j\in J_0$. Левое неравенство в (5.17) тривиально. Докажем правое неравенство. Из условия регулярности для задачи (5.16) в силу теоремы Куна — Таккера вытекает

$$F_0(x,\tilde{u})\leqslant F_0(\tilde{x},\tilde{u})\leqslant F_0(\tilde{x},u)\quad \forall x\in M,\quad \forall u\geqslant 0,$$

причем $\tilde{u}_j[f_j(\tilde{x})-\tilde{f}_j]=0$ $\forall j\in J_0$; здесь $F_0(x,u)=$ $=f_0(x)-\sum\limits_{j\in J_0} u_j[f_j(x)-\tilde{f}_j]$. Отсюда для $x\in M$ будем иметь:

$$f_0(x)-r\sum_{j\in J_0} f_j^{+2}(x)\leqslant f_0(\tilde{x})+\sum_{j\in J_0}\tilde{u}_j[f_j(x)-\tilde{f}_j]-$$
$$-\sum_{j\in J_0} f_j^{+2}(x)=\tilde{f}_0+\sum_{j\in J_0}\tilde{u}_j[f_j(x)-\tilde{f}_j]-r\sum_{j\in J_0}[f_j(x)-\tilde{f}_j]^2+$$
$$+rE-2r\sum_{j\in J_0}\tilde{f}_j\cdot f_j^{+}(x)\leqslant \tilde{f}_0+\frac{\|\tilde{u}\|^2}{4r}+rE-2r\sum_{j\in J_0} f_j^{+}(\tilde{x})\cdot f_j^{+}(x).$$

Следовательно,

$$\tilde{f}_r=\sup_{x\in M}\{f_0(x)-rf(x)\}\leqslant$$
$$\leqslant \tilde{f}_0+\frac{\|\tilde{u}\|^2}{4r}+rE-2r\min_{x\in M}\sum_{j\in J_0} f_j^{+}(\tilde{x})\cdot f_j^{+}(x).$$

Используя лемму (5.3), отсюда получаем

$$\tilde{f}_r\leqslant \tilde{f}_0-rE+\frac{\|\tilde{u}\|^2}{4r},$$

т. е. (5.17) верно.

5.3. Регуляризация несобственных задач линейного и выпуклого программирования. В основе аппроксимации несобственных задач линейного и выпуклого программирования, рассмотренной в § 3, лежит метод штрафных функций, или более общо — метод последовательного программирования [32]. Хотя метод сводит несобственную задачу к разрешимой, однако последняя может оказаться некорректной, например, в смысле α-корректности, β-корректности или $\bar{f}$-устойчивости [36]. В связи с этим возникает задача регуляризации несобственных задач. Проблему регуляризации в этой ситуации решает подход по Тихонову (регуляризация по Тихонову) [80].

Заменим задачу (5.9) на

$$C_{r\alpha}\colon \max\{f_0(x) - rf(x) - \alpha\|x\|^2\colon\ x \in M\}, \tag{5.18}$$

$f(x) = \sum\limits_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)$; здесь $\alpha > 0$. В определенных предположениях (5.18) и решает поставленную задачу. Естественно, говоря о регуляризации, необходимо выделить систему параметров задачи, относительно вариаций которых рассматриваются вопросы устойчивости. Если (4.1) — задача ЛП, т. е.

$$\max\{(c,\ x)\colon\ Ax \leqslant b,\quad x \geqslant 0\}, \tag{5.19}$$

то в роли вектора параметров могут выступить $y^{(1)} = [c,\ A^{(1)},\ b^{(1)}]$, $y^{(2)} = [c,\ A,\ b]$ и др.; здесь $A^{(1)}$, $b^{(1)}$ — матрица и столбец свободных членов, соответствующих подсистеме $l_j(x) \leqslant 0$, $j \in J_0$.

Отметим связь между задачами (5.9) и (5.18).

Теорема 5.6. *Если задача* (5.8) *разрешима и регулярна, то существует* $\alpha_0 > 0$ *такое, что для всех* $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ *и* $r > 1/\alpha_0$ *справедливо соотношение*

$$\arg C_{r\alpha} = \arg\min\{\|x\|^2\colon\ x \in \operatorname{Arg} C_r\}.$$

Это утверждение вытекает из результатов работы [32].

Весьма общие результаты по регуляризации некорректных экстремальных задач получены в [10, 82].

Отметим некоторые частные результаты по регуляризации несобственной задачи ЛП (5.19) 1-го рода. Пусть $l_j(x) \leqslant 0$ $(j = 1,\ \ldots,\ m)$ — система ограничений задачи (5.19), $\mathrm{N}_m = J_0 \cup J_1$, $J_0 = \{1,\ \ldots,\ j_0\}$, $M = \{x \geqslant 0\colon\ l_j\ (x) \leqslant 0\ \forall j \in J_1\} \neq \varnothing$, $f(x) = \sum\limits_{j \in J_0} v_j f_j^+(x)$.

Теорема 5.7. *Пусть для задачи* (5.19) *при* $c=c_0$, $A=A_0$ *и* $b=b_0$ *допустимое множество* M_0^* *двойственной задачи непусто, а* M_0 — *телесно. Тогда задача* (5.18) β-*корректна по* $y^{(2)}$ *в точке* $y_0^{(2)}=[c_0, A_0, b_0]$.

Теорема 5.8. *Пусть задача* (5.19) *при* $y^{(2)}=[c_0,\ A_0,\ b_0]$ — *несобственная задача 1-го рода. Тогда задача*

$$\max_{x\geqslant 0}\left\{(c, x)-rf(x)-\sum_{j\in J_1} r_j l_j^{+2}(x)-\alpha\|x\|^2\right\}$$

асимптотически по $r'=\min\limits_{j\in J_1} r_j>0$ *эквивалентна задаче* (5.18) *и* β-*корректна по* $y^{(2)}$ *в точке* $y_0^{(2)}$.

Теорема 5.9. *Пусть для задачи* (5.19) *при* $c=c_0$, $A=A_0$ *и* $b=b_0$ *множество* M_0^*, *отмеченное в теореме* 5.7, *непусто. Тогда задача* (5.18) β-*корректна по* $y^{(1)}$ *в точке* $y_0^{(1)}=\left[c_0, A_0^{(1)}, b_0^{(1)}\right]$, *где* $A_0^{(1)}, b_0^{(1)}$ — *значения матрицы* $A^{(1)}$ *и вектора* $b^{(1)}$, *соответствующие значению* $y_0^{(2)}$ *параметра* $y^{(2)}$.

Теоремы 5.7—5.9 в сопоставлении с теоремой 5.6 и решают проблему регуляризации несобственной задачи ЛП 1-го рода. Вопрос о регуляризации в случае несобственности 2-го рода сводится к аналогичному рассмотрению двойственной задачи. Если же задача ЛП является несобственной 3-го рода, то ее регуляризацию (по Тихонову) можно осуществить путем регуляризации задач (3.19) и (3.20), т. е. заменой их на

$$\min\{\|(Ax-b)^+\|_1+\alpha\|x\|^2\colon\ x\geqslant 0\},$$

$$\min\{\|(c-A^Tu)^+\|_1+\alpha\|u\|^2\colon\ u\geqslant 0\}.$$

ГЛАВА 11

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ниже будет рассмотрен аппарат двойственности для несобственных задач ЛП. Особое внимание будет уделено различным вариантам теоремы двойственности и их аппроксимационному смыслу.

§ 6. Основная теорема двойственности

Выпишем пару взаимно двойственных задач ЛП:

$$L\colon \max\{(c,\ x)\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}; \tag{6.1}$$

$$L^*\colon \min\{(b,\ u)\colon A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}. \tag*{(6.1)*}$$

Правило $(*)$ формирования задачи L^* по задаче L обладает свойством взаимности, т. е. будучи примененным к L^*, оно порождает исходную задачу: $(L^*)^* = L$. Задачи L и L^* связывает основная

Теорема двойственности. *Если одна из задач* (6.1), (6.1)* *разрешима, то разрешима и другая, при этом их оптимальные значения совпадают*: $\operatorname{opt} L = \operatorname{opt} L^*$.

О таких парах взаимно двойственных задач будем говорить, что они связаны *регулярной* двойственностью.

6.1. Схема формирования взаимно двойственной пары задач C и $C^{\#}$, отвечающих случаю несобственности L. Ниже исходной паре двойственных задач L и L^* по единой схеме π ставятся в соответствие собственные задачи C и $C^{\#}$, связанные между собой регулярной двойственностью, при этом C и $C^{\#}$ выступают в роли задач, аппроксимирующих L и L^* соответственно. Изобразим сказанное схематически:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, shift right, "(*)"'] & C \arrow[d, shift right, "(\#)"'] \\ L^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, shift right] & C^{\#} \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

Заметим, что схем, удовлетворяющих сформулированным свойствам, можно предложить достаточно много. На выбор конкретной схемы π целесообразно наложить ряд естественных требований, например, таких: схема должна быть достаточно общей и содержательно богатой; должна порождать возможность разнообразных аппроксимаций несобственных задач ЛП; должна не только обобщать двойственность в ЛП, но и обогащать ее. Именно такие требования и легли в основу построения схемы π, рассматриваемой ниже.

Зафиксируем произвольный «разрез» матрицы A на подматрицы A_j $(j=0, 1, \ldots, m_0)$ и B_i $(i=0, 1, \ldots, n_0)$ по горизонтали и вертикали соответственно:

$$A=\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{m_0} \end{bmatrix}=\left[B_0, B_1, \ldots, B_{n_0}\right].$$

Этому разрезу соответствует разрез векторов b и u, а также c и x:

$$b^T=\left[b^0, b^1, \ldots, b^{m_0}\right], \quad u^T=\left[u^0, u^1, \ldots, u^{m_0}\right];$$
$$c^T=\left[c^0, c^1, \ldots, c^{n_0}\right], \quad x^T=\left[x^0, x^1, \ldots, x^{n_0}\right].$$

Условимся придавать, если это необходимо, тем или иным выделенным подматрицам «пустые» значения $\varnothing$; так, например, если $A_i=\varnothing$ $(i=1, \ldots, m_0)$, то $A=A_0$ и т. д.

Пусть $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ — произвольные нормы в пространствах, которым принадлежат векторы u^j и x^i $(j=1, \ldots, m_0,\ i=1, \ldots, n_0)$; $\|\cdot\|^*_{p(j)}$ и $\|\cdot\|^*_{q(i)}$ — сопряженные им нормы.

Пусть $z^T=[z_1, \ldots, z_k]\in \mathbf{E}_k$. Для норм $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|z_i|$ и $\sum\limits_{i=1}^{k}|z_i|$ введем обозначения $\|z\|_0$ и $\|z\|_1$ соответственно (эти нормы являются взаимно сопряженными). Пусть $R_j>0$ $(j=1, \ldots, m_0)$, $r_i>0$ $(i=1, \ldots, n_0)$ — система положительных параметров.

Сформулируем задачи:

$$C\colon\ \sup\left\{(c, x)-\sum_{j=1}^{m} R_j\left\|(A_j x-b^j)^+\right\|_{p(j)}:\ A_0 x\leqslant b^0,\ x\geqslant 0,\right.$$
$$\left.\left\|x^i\right\|_{q(i)}\leqslant r_i,\ i=1, \ldots, n_0\right\}; \quad (6.2)$$

$$C^{\#}\colon\ \inf\left\{(b, u)+\sum_{i=1}^{n_0} r_i\left\|(c^i-B_i^T u)^+\right\|_{q(i)}^{*}:\ B_0^T u\geqslant\right.$$
$$\left.\geqslant c^0,\ u\geqslant 0,\ \left\|u^j\right\|_{p(j)}^{*}\leqslant R_j,\ j=1, \ldots, m_0\right\}. \quad (6.2)^{\#}$$

Замечание 6.1. Требования положительности величин R_j и r_i можно ослабить до неотрицательности. Если какое-либо из чисел R_j, например, R_1, принимает нулевое значение, то это, как легко видеть, означает, что в исходной задаче L вычеркиваются ограничения, отвечающие подматрице A_1. Если же $r_1=0$, то это соответствует вычеркиванию в задаче L подматрицы B_1, вместе с c^1 в векторе c. Такие операции сокращения задачи L иногда полезно предусматривать (особенно при программной реализации базы данных в рамках того или иного пакета программ, обеспечивающего численный анализ несобственных задач линейного программирования).

Замечание 6.2. Задачи (6.2) и $(6.2)^{\#}$ при $A_j=\varnothing$ $(j=1, \ldots, m_0)$, $B_i=\varnothing$ $(i=1, \ldots, n_0)$ превращаются в задачи (6.1) и $(6.1)^*$.

Подсистемы $A_0x\leqslant b^0$, $x\geqslant 0$ и $B_0^Tu\geqslant c^0$, $u\geqslant 0$ систем ограничений в задачах (6.1) и $(6.1)^*$, выделяемые подматрицами A_0 и B_0 (последние могут принимать значения $\varnothing$), будем предполагать совместными. Такое предположение не является, естественно, ограничительным, ибо всегда имеется возможность выделять совместные подсистемы несовместных систем. Содержательно это может соответствовать выделению директивных ограничений в предположении их обоснованности (т. е. объективной возможности их выполнения).

Замечание 6.3. Из вида задач C и $C^{\#}$ видно, что схема их формирования из задач L и L^* одна и та же (это схема π).

Замечание 6.4. Пусть $(\#)$ — правило, сопоставляющее задаче C задачу $C^{\#}$: $C\xrightarrow{(\#)}C^{\#}$. Тогда легко видеть (с учетом свойства $(\|\cdot\|^*)^* = \|\cdot\|$, где $\|\cdot\|$ — любая норма конечномерного пространства), что это правило является взаимным, т. е. $(C^\#)^\# = C$.

Замечание 6.5. В задачах (6.2) и $(6.2)^\#$ целевые функции, которые мы обозначим через $f[R](x)$ и $f^\#[r](u)$, являются вогнутой и выпуклой соответственно. Следовательно, задачи C и $C^\#$ являются задачами выпуклого программирования — с учетом, естественно, выпуклости неравенств

$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \quad i = 1, \ldots, n_0, \qquad \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0.$$

Если в задаче (6.2) все $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ являются нормами типа $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$, то назовем ее *l-задачей.* Из того, что (6.2) — l-задача, следует, что $(6.2)^\#$ также является l-задачей (и наоборот).

Замечание 6.6. Если (6.2) — l-задача, то C и $C^\#$ являются выпуклыми кусочно-линейными и могут быть эквивалентным образом переписаны в форме задач ЛП.

Замечание 6.7. В (6.2) и $(6.2)^\#$ поставлены операции sup и inf в силу того, что достижимость оптимума в этих задачах не гарантируется. Соответствующие примеры можно построить без труда.

Выделим в качестве самостоятельного факта следующее утверждение.

Теорема 6.1. *При любых*

$$\bar{x} \in M(r) = \{x \geqslant 0\colon A_0 x \leqslant b^0, \ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \ i = 1, \ldots, n_0\},$$

$$\bar{u} \in M^\#(R) = \{u \geqslant 0\colon B_0^T u \geqslant c^0, \ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \ j = 1, \ldots, m_0\}$$

выполняется неравенство

$$f[R](\bar{x}) \leqslant f^\#[r](\bar{u}).$$

Доказательство. Ниже в выкладках будут использованы неравенства

$$(u^j, (A_j x - b^j)^+) \leqslant \|u^j\|^*_{p(j)} \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)}, \quad j = 1, \ldots m, \tag{6.3}$$

$$(x^i, (c^i - B_i^T u)^+) \leqslant \|x^i\|_{q(i)} \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)}, \quad i = 1, \ldots, n_0, \tag{6.4}$$

выполнимость которых для всех x и u вытекает из определения сопряженной нормы. В силу (6.3) и условий

$\|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j \quad (j = 1, \ldots, m_0)$ имеем

$$f[R](\bar{x}) \leqslant (c, \bar{x}) - \sum_{j=1}^{m_0} \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)} \cdot \|(A_j\bar{x} - b^j)^+\|_{p(j)} \leqslant$$
$$\leqslant (c, \bar{x}) - \sum_{j=0}^{m_0} (\bar{u}^j, (A_j\bar{x} - b^j)^+).$$

Так как $A_j\bar{x} - b^j \leqslant (A_j\bar{x} - b^j)^+$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, то

$$f[R](\bar{x}) \leqslant (c, \bar{x}) - \sum_{j=1}^{m_0} (\bar{u}^j, A_j\bar{x} - b^j).$$

Из этого соотношения, с учетом равенства

$$\sum_{j=1}^{m_0} (\bar{u}^j, A_j\bar{x} - b^j) = (\bar{u}, A\bar{x} - b) - (\bar{u}^0, A_0\bar{x} - b^0)$$

и неравенств $A_0\bar{x} - b^0 \leqslant 0$, $\bar{u}^0 \geqslant 0$, получаем

$$f[R](\bar{x}) \leqslant (c, \bar{x}) - (\bar{u}, A\bar{x} - b) + (\bar{u}^0, A_0\bar{x} - b^0) \leqslant$$
$$\leqslant (c, \bar{x}) - (\bar{u}, A\bar{x} - b) = (c - A^T\bar{u}, \bar{x}) + (b, \bar{u}) =$$
$$= (b, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{n_0} (\bar{x}^i, c^i - B_i^T\bar{u}) + (\bar{x}^0, c^0 - B_0^T\bar{u}),$$

что в силу (6.4) и $c^0 - B_0^T\bar{u} \leqslant 0$ дает

$$f[R](\bar{x}) \leqslant (b, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{n_0} \|\bar{x}^i\|_{q(i)} \|(c^i - B_i^T\bar{u})^+\|^*_{q(i)}.$$

Так как $\|\bar{x}^i\|_{q(i)} \leqslant r_i$ $(i = 1, \ldots, n_0)$, то окончательно имеем

$$f[R](\bar{x}) \leqslant (b, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|(c^i - B_i^T\bar{u})^+\|^*_{q(i)} = f^\#[r](\bar{u}).$$

Следствие 6.1. *Если векторы $\bar{x} \in M(r)$ и $\bar{u} \in M^\#(R)$ обеспечивают равенство $f[R](\bar{x}) = f^\#[r](\bar{u})$, то они оптимальны для задач* (6.2) *и* (6.2)$^\#$ *соответственно.*

Сформулируем основное утверждение о регулярной двойственности, связывающей задачи (6.2) и (6.2)$^\#$.

Теорема 6.2. *Пусть задача* (6.2) *разрешима, а r_i $(i = 1, \ldots, n_0)$ таковы, что система неравенств*

$$\|x^i\|_{q(i)} < r_i, \quad i = 1, \ldots, n_0, \quad A_0x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0 \qquad (6.5)$$

совместна. Тогда задача (6.2)$^\#$ *разрешима и оптимальные значения задач* (6.2) *и* (6.2)$^\#$ *совпадают, т. е.* $\tilde{f} = \underset{\sim}{f}$.

Замечание 6.8. В силу взаимности задач (6.2) и (6.2)* справедлива и обратная теорема в следующей формулировке.

Из разрешимости задачи (6.2)* и совместности системы

$$\|u^j\|^*_{p(j)} < R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0, \quad B_0^T u \geqslant c^0, \quad u \geqslant 0 \qquad (6.6)$$

вытекает разрешимость задачи (6.2) и совпадение оптимальных значений этих задач.

Замечание 6.9. Требование совместности системы (6.5) в формулировке теоремы двойственности (или системы (6.6) в формулировке обратной теоремы) есть не что иное как формулировка условия регулярности R (см. § 2), обеспечивающего для разрешимой задачи выпуклого программирования с ограничениями задачи (6.2) справедливость теоремы Куна — Таккера. При некоторых частных реализациях норм $\|\cdot\|_{p(j)}$, $\|\cdot\|_{q(i)}$, например, когда $q(i) \in \{0, 1\}$, требование выполнимости строгих неравенств $\|x^i\|_{q(i)} < r_i$ ($i = 1, \ldots, n_0$) в системе (6.5) может быть снято. Этим обстоятельством мы воспользуемся в дальнейшем.

Доказательству теоремы предпошлем описание некоторой вспомогательной конструкции и несколько лемм.

Перепишем задачу (6.2) в эквивалентном виде:

$$\sup \Big\{ (c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|t^j\|_{p(j)} \colon A_j x \leqslant b^j + t^j, \ j = 1, \ldots, m_0,$$

$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \quad i = 1, \ldots, n_0, \quad A_0 x \leqslant b^0, [x, t] \geqslant 0 \Big\}; \qquad (6.7)$$

здесь $t = \left[t^1, \ldots, t^{m_0}\right]$. Последней поставим в соответствие функцию Лагранжа

$$F(x, t; u, v) = (c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|t^j\|_{p(j)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, A_j x - b^j - t^j) - \sum_{i=1}^{n_0} v_i (\|x^i\|_{q(i)} - r_i) - (u^0, A_0 x - b^0);$$

здесь $u^T = \left[u^0, u^1, \ldots, u^{m_0}\right]$, $v^T = \left[v_1, \ldots, v_{n_0}\right] \geqslant 0$ — векторы неотрицательных множителей Лагранжа.

Лемма 6.1. *Справедливо равенство*

$$F(x, t; u, v) = (b, u) + (c^0 - B_0^T u, x^0) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i v_i + \sum_{j=1}^{m_0} \left[- R_j \| t^j \|_{p(j)} + (t^j, u^j)\right] + \sum_{i=1}^{n_0} \left[(c^i - B_i^T u, x^i) - v_i \| x^i \|_{q(i)}\right]. \quad (6.8)$$

Доказательство носит чисто выкладочный характер, поэтому пояснений к нижеследующим преобразованиям мы не даем. Итак:

$$F(x, t; u, v) = \sum_{i=1}^{n_0} (c^i, x^i) + \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, b^j) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| t^j \|_{p(j)} + \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, t^j) - \sum_{j=0}^{m_0} (A_j^T u^j, x) - \sum_{i=1}^{n_0} v_i (\| x^i \|_{q(i)} - r_i) - (u^0, A_0 x - b^0) = (b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - B_i^T u, x^i) + (c^0 - B_0^T u, x^0) + \sum_{j=1}^{m_0} (u^j, t^j) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| t^j \|_{p(j)} - \sum_{i=1}^{n_0} v_i (\| x^i \|_{q(i)} - r_i) = (b, u) + (c^0 - B_0^T u, x^0) + \sum_{i=1}^{n_0} v_i r_i + \sum_{j=1}^{m_0} \left[- R_j \| t^j \|_{p(j)} + (t^j, u^j)\right] + \sum_{i=1}^{n_0} \left[(c^i - B_i^T u, x^i) - v_i \| x^i \|_{q(i)}\right],$$

что и требовалось.

Положим $F_0(x^0) = (c^0 - B_0^T u, x^0)$, $F_1(t^j) = (t^j, u^j) - R_j \| t^j \|_{p(j)}$, $F_2(x^i) = (c^i - B_i^T u, x^i) - v_i \| x^i \|_{q(i)}$.

Лемма 6.2. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{t^j \geqslant 0} F_1(t^j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \| u^j \|_{p(j)}^* \leqslant R_j, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как

$$(t^j, u^j) \leqslant \|t^j\|_{p(j)} \|u^j\|^*_{p(j)}, \tag{6.9}$$

то при $\|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j$ будем иметь

$$F_1(t^j) \leqslant \|t^j\|_{p(j)} (-R_j + \|u^j\|^*_{p(j)}) \leqslant 0 \quad \forall t^j \geqslant 0.$$

Учитывая $F_1(0) = 0$, получаем первый случай доказываемого соотношения. Пусть теперь $\|u^j\|^*_{p(j)} > R_j$. При некотором $\bar{t}^j \geqslant 0$, $\bar{t}^j \neq 0$, в (6.9) будет иметь место равенство. Положив $t^j = \alpha \bar{t}^j$, получим

$$F_1(t^j) = \alpha \|\bar{t}^j\|_{p(j)} (-R_j + \|u^j\|^*_{p(j)}) \to +\infty \text{ при } \alpha \to +\infty.$$

Этим самым доказан и второй случай.

Лемма 6.3. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{x^i \geqslant 0} F_2(x^i) = \begin{cases} 0, & \textit{если } \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)} \leqslant v_i, \\ +\infty & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как

$$((c^i - B_i^T u)^+, x^i) \leqslant \|x^i\|_{q(i)} \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)}, \tag{6.10}$$

то при $\|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)} \leqslant v_i$ будем иметь:

$$F_2(x^i) \leqslant \|x^i\|_{q(i)} (-v_i + \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)}) \leqslant 0 \quad \forall x^i \geqslant 0.$$

Учитывая $F_2(0) = 0$, получаем первый случай доказываемого соотношения. Пусть теперь

$$\|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)} > v_i. \tag{6.11}$$

При некотором $\bar{x}^i \geqslant 0$, $\bar{x}^i \neq 0$, неравенство (6.10) обратится в равенство

$$((c^i - B_i^T u)^+, \bar{x}^i) = \|\bar{x}^i\|_{q(i)} \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)}. \tag{6.12}$$

Из $\bar{x}^i$ образуем вектор $\tilde{x}^i$ по правилу: если какая-либо координата вектора $(c^i - B_i^T u)^+$ равна нулю, то соответствующую координату вектора $\bar{x}^i$ обращаем в нуль. От этого левая часть в (6.12) при замене $\bar{x}^i$ на $\tilde{x}^i$ не изменится, а правая разве лишь уменьшится, т. е.

$$((c^i - B_i^T u)^+, \tilde{x}^i) \geqslant \|\tilde{x}^i\|_{q(i)} \|(c^i - B_i^T u)^+\|^*_{q(i)}. \tag{6.13}$$

При этом $\tilde{x}^i \neq 0$, иначе все координаты вектора $c^i - B_i^T u$ были бы неположительны, но тогда неравенство (6.11) было бы противоречивым: $0 > v_i \geqslant 0$.

Положим $x^i = \alpha\tilde{x}^i$. Учитывая (6.13) и (6.11), получим

$$F_2(x^i) = \alpha\left[(c^i - B_i^T u, \tilde{x}^i) - v_i\|\tilde{x}^i\|_{q(i)}\right] =$$
$$= \alpha\left[((c^i - B_i^T u)^+, \tilde{x}^i) - v_i\|\tilde{x}^i\|_{q(i)}\right] \geqslant$$
$$\geqslant \alpha\|\tilde{x}^i\|_{q(i)}\left(\|(c^i - B_i^T u)^+\|_{q(i)}^* - v_i\right) \to +\infty \text{ при } \alpha \to +\infty.$$

Следовательно, доказан и второй случай.

Выпишем систему неравенств

$$\begin{gathered} B_0^T u \geqslant c^0,\ u \geqslant 0,\ \|u^j\|_{p(j)}^* \leqslant R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0; \\ \|(c^i - B_i^T u)^+\|_{q(i)}^* \leqslant v_i, \quad i = 1, \ldots, n_0. \end{gathered} \tag{6.14}$$

Лемма 6.4. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{[x,t]\geqslant 0} F(x, t; u, v) = \begin{cases} b(u) + \sum\limits_{i=1}^{n_0} r_i v_i, & \textit{если система (6.14) совместна}, \\ +\infty & \textit{в противном случае}. \end{cases}$$

Доказательство получается из лемм 6.1—6.3 с учетом очевидного соотношения

$$\sup_{x^0\geqslant 0} F_0(x^0) = \begin{cases} 0, & \text{если } c^0 - B_0^T u \geqslant 0, \\ +\infty & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Из леммы 6.4 вытекает равенство

$$\min_{[u,v]\geqslant 0}\max_{[x,t]\geqslant 0} F(x, t; u, v) =$$
$$= \min\left\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} v_i r_i : u, v \text{ удовлетворяют (6.14)}\right\}, \tag{6.15}$$

которое показывает, что левая часть выписанного соотношения равна оптимальному значению $\underset{\sim}{f}$ задачи $(6.2)^*$, ибо задача (6.15) есть эквивалентная запись задачи $(6.2)^*$.

Завершение доказательства теоремы 6.2 теперь не представляет труда. А именно, условия теоремы позволяют применить к задаче (6.2) теорему Куна — Таккера, в силу которой

$$\max_{[x,t]\geqslant 0}\min_{[u,v]\geqslant 0} F(x, t; u, v) = \min_{[u,v]\geqslant 0}\max_{[x,t]\geqslant 0} F(x, t; u, v),$$

при этом множество оптимальных решений левой задачи, совпадающее с множеством оптимальных решений задачи (6.2), будет совпадать и с множеством оптимальных решений правой задачи. Так как левая часть выписанного равенства равна $\tilde{f}$, а правая, как было показано, равна $\underset{\sim}{f}$, то этим самым теорема доказана.

Приведем несколько следствий из основной теоремы 6.2.

Следствие 6.2. *В условиях, обеспечивающих для задач C и $C^{\#}$ регулярную двойственность (т. е. разрешимость и совпадение оптимальных значений), отыскание их оптимальных векторов сводится к нахождению хотя бы одного решения системы линейных и выпуклых неравенств*

$$\begin{aligned} &A_0x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0, \quad \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \quad i = 1, \ldots, n_0; \\ &B_0^T u \geqslant c^0, \quad u \geqslant 0, \quad \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0; \end{aligned} \quad (6.16)$$
$$f^{\#}[r](u) - f[R](x) \leqslant 0.$$

Обозначим через $\tilde{f}(b, c)$ оптимальное значение задачи C как функцию параметров b («вектор ресурсов») и c («вектор цен»). В условиях теоремы 6.2 $\tilde{f}(b, c)$, будучи функцией оптимума и для $C^{\#}$, является вогнутой по b и выпуклой по c. Это следует из эквивалентности представления задачи C в форме (6.7) и задачи $C^{\#}$ в форме

$$\inf\Big\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|v_i\|^*_{q(i)}:\ c^i - B_i^T u \leqslant v_i,$$
$$i = 1, \ldots, n_0, \quad B_0^T u \geqslant c^0, \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$
$$[u, v] \geqslant 0\Big\} \quad (6.17)$$

с использованием утверждения, содержащегося в [36, упр. 1, стр. 125].

Пусть $\widetilde{M}(b, c)$ и $\widetilde{M}^{\#}(b, c)$ — оптимальные множества задач C и $C^{\#}$ соответственно.

Следствие 6.3. *Если в условиях теоремы 6.2 множества $\widetilde{M}(b, c)$ и $\widetilde{M}^{\#}(b, c)$ ограничены, то*

1) *для* $s \geqslant 0$ $$\frac{\partial \tilde{f}(b, c)}{\partial s} = \lim_{t \to +0} \frac{\tilde{f}(b + ts, c) - \tilde{f}(b, c)}{t} = \min\{(\tilde{u}, s):\ \tilde{u} \in \widetilde{M}^{\#}(b, c)\};$$

2) *для* $l \leqslant 0$ $$\frac{\partial \tilde{f}(b, c)}{\partial l} = \lim_{t \to +0} \frac{\tilde{f}(b, c + tl) - \tilde{f}(b, c)}{t} = \max\{(\tilde{x}, -l):\ \tilde{x} \in \widetilde{M}(b, c)\}.$$

В частности, если $\tilde{M}(b, c) = \{\tilde{x}\}$ и $\tilde{M}^{\#}(b, c) = \{\tilde{u}\}$, то

$$\frac{\partial\tilde{f}(b, c)}{\partial s} = (\tilde{u}, s), \quad \frac{\partial\tilde{f}(b, c)}{\partial l} = -(\tilde{x}, l).$$

При $s = [0, \ldots, s_j = 1, 0, \ldots, 0]$, $l = [0, \ldots, l_i = -1, 0, \ldots, 0]$ отсюда получаем

$$\frac{\partial\tilde{f}(b, c)}{\partial b_j} = \tilde{u}_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \frac{\partial\tilde{f}(b, c)}{\partial(-c_i)} = -\tilde{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\tilde{x}^T = [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n]$, $\tilde{u}^T = [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m]$.

Следствие доказывается применением теоремы 28.3 из [36], с учетом возможности представлений задач C и $C^{\#}$ в виде (6.7) и (6.17), а также равенства $\tilde{f}(b, c) = \tilde{f}^{\#}(b, c)$, где $\tilde{f}^{\#}(b, c)$ — функция оптимума задачи $C^{\#}$ (или задачи (6.17), что одно и то же).

6.2. Частные реализации двойственности. Выпишем некоторые частные реализации задач (6.2) и (6.2)$^{\#}$ и сформулируем соответствующие теоремы двойственности.

Пусть в (6.2) и (6.2)$^{\#}$ A_j — j-я строка, а B_i — i-й столбец матрицы A (следовательно, $A_0 = \varnothing$, $B_0 = \varnothing$). Тогда задачи (6.2) и (6.2)$^{\#}$ примут вид

$$C_1\colon \max\{(c, x) - (R, (Ax - b)^+)\colon 0 \leqslant x \leqslant r\}, \qquad (6.18)$$

$$C_1^{\#}\colon \min\{(b, u) + (r, (c - A^T u)^+)\colon 0 \leqslant u \leqslant R\}; \qquad (6.18)^{\#}$$

здесь $R = [R_1, \ldots, R_m]^T$, $r = [r_1, \ldots, r_n]^T$. В (6.18) и (6.18)$^{\#}$ вместо операций sup и inf поставлены max и min в силу очевидной достижимости этих операций.

Теорема 6.3. *Задачи* (6.18) *и* (6.18)$^{\#}$ *разрешимы при любых* $R \geqslant 0$ *и* $r \geqslant 0$, *при этом их оптимальные значения совпадают.*

Пусть теперь $A_0 = \varnothing$, $B_0 = \varnothing$, $m_0 = 1$, $n_0 = 1$, так что $A_1 = B_1 = A$. В этом случае получим следующую реализацию задач (6.2) и (6.2)$^{\#}$:

$$\max\{(c, x) - R_0\|(Ax - b)^+\|_p\colon \|x\|_q \leqslant r_0,\ x \geqslant 0\}, \qquad (6.19)$$

$$\min\{(b, u) + r_0\|(c - A^T u)^+\|_q^*\colon \|u\|_p^* \leqslant R_0, u \geqslant 0\}; \qquad (6.19)^{\#}$$

здесь $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ — произвольные нормы соответственно в пространствах $\mathbf{E}_m$ и $\mathbf{E}_n$, $R_0 > 0$, $r_0 > 0$. Для выписанной пары задач справедлива

Теорема 6.4. *Задачи* (6.19) *и* (6.19)$^{\#}$ *всегда разрешимы, и их оптимальные значения совпадают.*

Если (6.1) — несобственная задача 1-го рода, то можно положить $B_i = \varnothing$ $(i = 1, \ldots, n_0)$, тогда $B_0 = A$ и задачи (6.2) и (6.2)* запишутся в следующем виде:

$$\sup\left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)}:\ A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\right\}; \tag{6.20}$$

$$\inf\{(b, u):\ A^T u \geqslant c, u \geqslant 0, \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j,\ j = 1, \ldots, m_0\}. \tag{6.20*}$$

Применительно к этой паре задач теорема 6.2 будет звучать следующим образом.

Теорема 6.5. *Из разрешимости задачи* (6.20) *следуют разрешимость задачи* (6.20)* *и совпадение оптимальных значений этих задач.*

Обратно, если задача (6.20)* *разрешима, при этом* R_j *таковы, что система неравенств*

$$A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad \|u^j\|^*_{p(j)} < R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

совместна, то задача (6.20) *также разрешима; при этом их оптимальные значения совпадают.*

Приведем другой вариант теоремы двойственности применительно к рассматриваемой паре задач.

Теорема 6.6. *Пусть система ограничений в* (6.20)* *совместна* (*это в силу теоремы* 6.1 *уже обеспечивает ограниченность оптимального значения задачи* (6.20)), *а верхняя грань в задаче* (6.20) *достижима, т. е. последняя разрешима. Тогда задача* (6.20)* *также разрешима; при этом их оптимальные значения совпадают.*

Заметим, что если $A_0 = \varnothing$, то система ограничений в задаче (6.20)* определяет ограниченное множество — как только эта система совместна. Поэтому достижимость нижней грани в (6.20)* гарантируется. Следовательно, обратный вариант теоремы двойственности в этом случае принимает следующую формулировку.

Теорема 6.7. *Если система неравенств*

$$A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad \|u^j\|^*_{p(j)} < R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

совместна, то разрешима как задача (6.20)*, *так и задача*

$$\max\left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)}:\ x \geqslant 0\right\}; \tag{6.21}$$

при этом их оптимальные значения совпадают.

Если, кроме того, $m_0 = 1$, т. е. $A_1 = A$, то (6.20) и (6.20)$^{\#}$ принимают вид

$$\max\{(c,x) - R_0 \|(Ax-b)^+\|_p \colon x \geqslant 0\}, \qquad (6.22)$$

$$\min\{(b,u)\colon A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad \|u\|_p^* \leqslant R_0\}; \qquad (6.22)^{\#}$$

здесь $R_0 > 0$, $\|\cdot\|_p$ — произвольная норма пространства $\mathbf{E}_m$. Для этого случая предыдущая теорема будет звучать следующим образом.

Теорема 6.8. *Если система неравенств*

$$A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad \|u\|_p^* < R_0$$

совместна (для этого необходимо и достаточно, чтобы $R_0 > \min\{\|u\|_p^*\colon A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}$*), то каждая из задач* (6.22), (6.22)$^{\#}$ *разрешима; при этом их оптимальные значения совпадают.*

Рассмотрим, далее, случай, когда (6.1) — несобственная задача 2-го рода; тогда можно положить $A_j = \varnothing$ ($j = 1, \ldots, m_0$), поэтому $A_0 = A$. Указанной ситуации соответствует пара взаимно двойственных задач

$$\sup\{(c,x)\colon Ax \leqslant b, x \geqslant 0, \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \ i = 1, \ldots, n_0\}, \qquad (6.23)$$

$$\inf\left\{(b,u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|(c^i - B_i^T u)^+\|_{q(i)}^* \colon B_0^T u \geqslant c^0, u \geqslant 0\right\}. \qquad (6.23)^{\#}$$

Для этой пары задач аналогами теорем 6.5 и 6.6 будут:

Теорема 6.9. *Если* r_i ($i = 1, \ldots, n_0$) *таковы, что система неравенств*

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0, \quad \|x^i\|_{q(i)} < r_i, \quad i = 1, \ldots, n_0$$

совместна, а задача (6.23) *разрешима, то разрешима и задача* (6.23)$^{\#}$; *при этом их оптимальные значения совпадают.*

Обратно, из разрешимости задачи (6.23)$^{\#}$ *следуют разрешимость* (6.23) *и совпадение их оптимальных значений.*

Теорема 6.10. *Пусть система ограничений в* (6.23) *совместна (это в силу теоремы* 6.1 *уже обеспечивает ограниченность оптимального значения задачи* (6.23)$^{\#}$*), а нижняя грань в* (6.23)$^{\#}$ *достижима, т. е. последняя разрешима. Тогда задача* (6.23) *также разрешима и их оптимальные значения совпадают.*

Заметим, что если $B_0 = \varnothing$, то задача (6.23) разрешима, как только ее система ограничений совместна. Это следует из того, что в этом случае $x=[x^1, \ldots, x^{n_0}]^T$, а потому неравенства $\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i$ $(i=1, \ldots, n_0)$ определяют ограниченное множество решений. В рассматриваемой ситуации задача (6.23)$^\#$ запишется в виде

$$\min\left\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \left\| \left(c^i - B_i^T u\right)^+ \right\|_{q(i)}^*: \ u \geqslant 0\right\}.$$

Если, кроме того, $n_0 = 1$ (а потому $B_1 = A$), то задачи (6.23) и (6.23)$^\#$ принимают вид

$$\max\{(c, x): \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0, \ \|x\|_q \leqslant r_0\}, \tag{6.24}$$

$$\min\{(b, u) + r_0 \|(c - A^T u)^+\|_q^*: \ u \geqslant 0\}; \tag{6.24$^\#$}$$

здесь $r_0 > 0$, $\|\cdot\|_q$ — произвольная норма пространства $\mathbf{E}_n$. Для этой пары справедлив аналог теоремы 6.8.

Теорема 6.11. *Если в* (6.24) $r_0 > \min\{\|x\|_q: \ x \geqslant 0, Ax \leqslant b\}$, *то каждая из задач* (6.24), (6.24)$^\#$ *разрешима и их оптимальные значения совпадают.*

6.3. Теорема двойственности для l-задач. Напомним, что если в (6.2) нормы $\|\cdot\|_{p(j)}$ и $\|\cdot\|_{q(i)}$ имеют тип $\|x\|_0$ или $\|x\|_1$, то задача (6.2) называется *l-задачей*. Если (6.2) — l-задача, то в силу соотношений $\|\cdot\|_0^* = \|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1^* = \|\cdot\|_0$ (6.2)$^\#$ является также l-задачей (и наоборот).

Пусть (6.2) — l-задача. Тогда она (равным образом и (6.2)$^\#$) является выпуклой кусочно-линейной программой и может быть переписана в виде задачи ЛП. Для l-задач снимаются вопросы достижимости нижней и верхней граней в (6.2) и (6.2)$^\#$, а также вопрос об условиях регулярности, обеспечивающих возможность применения теоремы Куна — Таккера при доказательстве теоремы двойственности (см. замечание 6.9).

Теорема 6.12. *Если* (6.2) — *l-задача, то из ее разрешимости* (*или разрешимости* (6.2)$^\#$) *следует разрешимость* (6.2)$^\#$ (*или соответственно — разрешимость* (6.2)) *и совпадение их оптимальных значений.*

Если допустимые множества $M(r)$ и $M^\#(R)$ l-задач (6.2) *и* (6.2)$^\#$ *непусты, то эти задачи разрешимы и их оптимальные значения совпадают.*

Сделаем пояснение к доказательству второй части теоремы. В силу теоремы 6.1 оптимальные значения задач (6.2) и (6.2)$^\#$ конечны. Но так как для l-задачи верхняя грань в (6.2) достижима, то (6.2) разрешима, а потому утверждение верно.

Укажем один частный случай l-задачи, а именно, задачу (6.22) при $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_1$. Тогда возникает следующая пара взаимно двойственных задач:

$$\max\left\{(c, x) - R_0 \sum_{j=1}^{m} l_j^+(x) \colon\ x \geqslant 0\right\}, \tag{6.25}$$

$$\min\{(b, u) \colon\ A^T u \geqslant c,\ 0 \leqslant u \leqslant \overline{R}\}; \tag{6.25$^\#$}$$

здесь $R_0 > 0$, $\overline{R} = [R_0, \ldots, R_0]^T \in \mathbf{E}_m$, $[l_1^+(x), \ldots, l_m^+(x)]^T = (Ax - b)^+$.

Последние отвечают ситуации несобственности 1-го рода (для задачи (6.1)) и связаны регулярной двойственностью.

В содержательном аспекте представляет интерес пара двойственных задач

$$\max\left\{(c, x) - \sum_{j>k} R_j l_j^+(x) \colon\ A_0 x \leqslant b^0,\ x \geqslant 0\right\}, \tag{6.26}$$

$$\min\{(b, u) \colon\ A^T u \geqslant c,\quad u \geqslant 0,\quad u_j \leqslant R_j\quad \forall j > k\}, \tag{6.26$^\#$}$$

получающаяся из (6.20) и (6.20)$^\#$ при $A_0 x - b^0 = [l_1(x), \ldots, l_k(x)]^T$, $A_j x - b^j = l_j(x)\quad \forall j > k$. Пара (6.25), (6.25)$^\#$ является частным случаем (6.26), (6.26)$^\#$.

В завершение этого пункта приведем вид задач C и $C^\#$ для других стандартных записей исходной задачи ЛП, а именно:

$$L_1\colon\ \max\{(c,\ x) \colon\ Ax \leqslant b\},$$
$$L_2\colon\ \min\{(c,\ x) \colon\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}.$$

Двойственные к L_1 и L_2 задачи запишутся соответственно в виде

$$L_1^*\colon\ \min\{(b, u) \colon\ A^T u = c,\ u \geqslant 0\},$$
$$L_2^*\colon\ \max\{(b, u) \colon\ A^T u \geqslant c\}.$$

Соответствующие задачи C и $C^\#$ примут вид:

$$C_1\colon\ \sup\left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|(A_j x - b^j)^+\|_{p(j)} \colon\ A_0 x \leqslant b^0,\right.$$
$$\left.\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i,\quad i = 1, \ldots, n_0\right\},$$

$$C_1^{\#}\colon\ \inf\Big\{(b,u)+\sum_{i=1}^{h_0} r_i\|c^i-B_i^Tu\|^*_{q(i)}\colon\ B_0^Tu=c^0,$$

$$u\geqslant 0,\ \|u^j\|^*_{p(j)}\leqslant R_j,\ j=1,\ldots,m_0\Big\};$$

$$C_2\colon\ \inf\Big\{(c,x)+\sum_{j=1}^{m_0} R_j\|A_jx-b^j\|_{p(j)}\colon\ A_0x=b^0,$$

$$x\geqslant 0,\ \|x^i\|_{q(i)}\leqslant r_i,\quad i=1,\ldots,n_0\Big\},$$

$$C_2^{\#}\colon\ \sup\Big\{(b,u)-\sum_{i=1}^{n_0} r_i\|(c^i-B_i^Tu)^+\|^*_{q(i)}\colon\ B_0^Tu\leqslant c^0,$$

$$\|u^j\|^*_{p(j)}\leqslant R_j,\ j=1,\ldots,m_0\Big\}.$$

Формулировка теорем 6.2—6.12 для задач L_1 и L_2 не представляет труда.

6.4. Содержательная интерпретация частной реализации задач C и $C^{\#}$. Пусть задача (6.1) — несобственная 1-го рода, т. е. система неравенств $Ax\leqslant b$, $x\geqslant 0$ несовместна, а система $A^Tu\geqslant c$, $u\geqslant 0$ совместна. В прикладном отношении этот случай наиболее важен. Он характеризуется тем, что за счет вариации вектора b задачу можно сделать разрешимой.

При содержательной интерпретации задач C и $C^{\#}$ будем исходить из традиционной экономико-технологической интерпретации задачи (6.1), в силу которой b — «вектор ресурсов», c — «вектор цен», i-ый столбец матрицы A — модель i-го «технологического способа», задающего затраты ресурсов на производство единицы i-го продукта, x_i — объем выпуска i-го продукта. Таким образом, если $(a_j,x)\leqslant b_j$ ($j=1,\ldots,m$, $x\geqslant 0$) — запись системы неравенств $Ax\leqslant b$, $x\geqslant 0$, то скалярное произведение (a_j,x) исчисляет затраты j-го ресурса, приходящиеся на вектор продукции $x\geqslant 0$.

В целях последующего изложения нам понадобится изложить содержательный подход к формированию задачи $(6.1)^{\#}$ в соответствии со слецующей игровой схемой. Дополним объект «производство», в качестве модели которого выступает задача (6.1), объектом «рынок». *Стратегией производства* будем считать любой вектор $x\geqslant 0$, *стратегией рынка* — m-мерный вектор $u\geqslant 0$ цен на ресурсы b_j $(j=1, \ldots, m)$. Рынок несет функции формирования цен на ресурсы и поглощения продукта, при этом продукт продается по фиксированным (директивным) ценам, цены же на ресурсы формируются в результате конкурентного взаимодействия производства и рынка, формализуемого здесь на основе игровой модели (игры двух лиц с нулевой суммой). Производство может реализовать любой план, докупив на рынке недостающие для этого ресурсы (или продав излишки) по ценам рынка. В качестве платежной функции в этой игре выступает функция Лагранжа

$$F(x, u) = (c, x) - (u, Ax - b);$$

она характеризует, как легко видеть, доход производства (или издержки рынка).

Принцип гарантированного результата, примененный к анализу игры «производство — рынок», порождает две задачи:

$$\max_{x \geqslant 0} \min_{u \geqslant 0} F(x, u), \tag{6.27}$$

$$\min_{u \geqslant 0} \max_{x \geqslant 0} F(x, u). \tag*{(6.27)*}$$

Первая из них моделирует поиск оптимальной стратегии $\tilde{x} \geqslant 0$ производства, вторая — оптимальной стратегии цен $\tilde{u} \geqslant 0$ рынка. Легко убедиться, что задача (6.27) сводится к (6.1), а (6.27)* — к (6.1)*.

Действительно,

$$\max_{x \geqslant 0} \min_{u \geqslant 0} F(x, u) = \max_{x \geqslant 0} \left\{ \min_{u \geqslant 0} \left[(c, x) - (u, Ax - b) \right] \right\} =$$
$$= \max_{x \geqslant 0} \begin{cases} (c, x), & Ax \leqslant b \\ -\infty, & Ax \nleqslant b \end{cases} = \max \{ (c, x) : Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0 \};$$

$$\min_{u \geqslant 0} \max_{x \geqslant 0} F(x, u) = \min_{u \geqslant 0} \left\{ \max_{x \geqslant 0} \left[(b, u) - (A^T u - c, x) \right] \right\} =$$
$$= \min_{u \geqslant 0} \begin{cases} (b, u), & A^T u \geqslant c \\ +\infty, & A^T u \ngeqslant c \end{cases} = \min \{ (b, u) : A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0 \}.$$

Выше мы воспользовались очевидным преобразованием $(c, x) - (u, Ax - b) = (b, u) - (A^T u, x) + (c, x) = (b, u) - (A^T u - c, x)$.

Заметим, что описанная схема (назовем ее *схемой* Г) формирования двойственной задачи на основе игрового подхода может быть применена не только к линейному случаю. Тому пример — получение задачи C^* из C, однако в последнем случае, как видно из доказательства теоремы 6.2, схема применяется после определенного преобразования исходной задачи C — и это существенно.

Ниже мы обратимся к варианту задач C и $C^{\#}$ в форме (6.26) и (6.26)$^{\#}$, что соответствует тому, что (6.1) — несобственная задача 1-го рода. Будем считать, что система ограничений задачи L разбита на две подсистемы

$$A_0x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0, \quad A_1x \leqslant b^1,$$

или, что то же самое,

$$l_j(x) = (a_j, x) - b_j \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, k, \quad x \geqslant 0,$$
$$l_j(x) \leqslant 0, \quad j = k+1, \ldots, m;$$

при этом первая подсистема отражает директивные ограничения, для которых имеется объективная возможность их выполнить, т. е. эта подсистема совместна. Что касается второй подсистемы ограничений, то они не могут быть выполнены (из-за несовместности системы $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$). Но можно допустить, что недостаток некоторых из ресурсов $b_{k+1}, \ldots, b_m$ можно восполнить за счет их приобретения на рынке по установившимся ценам R_j $(j > k)$. Тогда доход производства будет выражаться функцией

$$f[R](x) = (c, x) - \sum_{j>k} R_j l_j^+(x);$$

задача же оптимизации производства запишется в форме (6.26). Непосредственное применение схемы Г к задаче (6.26) задачу (6.26)$^{\#}$ не порождает; здесь необходима такая редукция задачи (6.26), чтобы двойственные переменные (переменные Лагранжа) u_j $(j > k)$ были соотнесены ограничениям $l_j(x) \leqslant t_j$, фигурирующим в следующей записи задачи (6.26):

$$\max\Big\{(c, x) - \sum_{j>k} R_j t_j \colon A_0x \leqslant b^0, \quad x \geqslant 0,$$
$$l_j(x) \leqslant t_j, \ t_j \geqslant 0 \ \forall j > k\Big\}.$$

Примененная к ней схема Г как раз и порождает задачу (6.26)$^{\#}$. Смысл координат оптимального вектора задачи (6.26)$^{\#}$ вскрывается во всей полноте следствием 6.3. Таким образом, как задача (6.26), так и двойственная к ней (в смысле правила $\xrightarrow{(\#)}$), описаны нами на содержательном языке.

6.5. Асимптотическая теорема двойственности. Целесообразность рассмотрения асимптотических теорем двойственности проиллюстрируем на регулярно двойственной паре задач (6.18) и (6.18)*. Их целевые функции не являются гладкими. Это обстоятельство делает применение некоторых методов для их решения затруднительным. На этот случай может быть применен прием сведения задач (6.18) и (6.18)* к паре аппроксимирующих их задач с гладкими целевыми функциями, разность оптимальных значений которых будет мала, при этом тем меньше, чем больше величины $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m} R_j$ и $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$.

Поставим задачам (6.18) и (6.18)* в соответствие задачи

$$\max\left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j t_j - \sum_{j=1}^{m} R_j^{2+\varepsilon_j} [l_j(x) - t_j]^{+2}:\right.$$

$$\left. 0 \leqslant x \leqslant r, \quad t = [t_1, \ldots, t_m] \geqslant 0\right\}, \tag{6.28}$$

$$\min\left\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n} r_i \mu_i + \sum_{i=1}^{n} r_i^{2+\delta_i} [h_i(u) - \mu_i]^{+2}:\right.$$

$$\left. 0 \leqslant u \leqslant R, \quad \mu = [\mu_1, \ldots, \mu_n] \geqslant 0\right\}; \tag{6.29}$$

здесь $l_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — левые части системы неравенств $Ax - b \leqslant 0$; $h_i(u)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — левые части системы неравенств $c - A^T u \leqslant 0$; $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{m}$ и $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$ — любые положительные числа.

Теорема 6.13. *Пусть $\tilde{f}$ — общее оптимальное значение задач* (6.18) *и* (6.18)*, $\bar{f}$ *и* $\underline{f}$ — *оптимальные значения задач* (6.28) *и* (6.29) *соответственно. Тогда*

$$|\tilde{f} - \bar{f}| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j^{\varepsilon_j}}, \quad |\tilde{f} - \underline{f}| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i^{\delta_i}}; \tag{6.30}$$

отсюда

$$|\bar{f} - \underline{f}| \leqslant \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j^{\varepsilon_j}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i^{\delta_i}}\right) \to 0$$

при $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m} R_j \to +\infty$, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} r_i \to +\infty$.

Доказательство. Задачу (6.18) эквивалентным образом можно переписать в виде

$$\max\left\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m} R_j t_j \colon l_j(x) \leqslant t_j,\ j = 1, \ldots, m,\right.$$

$$\left. 0 \leqslant x \leqslant r,\ t \geqslant 0\right\}. \qquad (6.31)$$

Как было ранее показано, вектор $\bar{u}$, являющийся оптимальным решением задачи (6.18)*, выступает в роли вектора двойственных оценок ограничений $l_j(x) \leqslant t_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ в задаче (6.31). Но тогда по теореме 25.2 [36] справедлива оценка

$$|\tilde{f} - \bar{f}| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m} \frac{(\bar{u}_j)^2}{R_j^{2+\varepsilon_j}}. \qquad (6.32)$$

Так как $0 \leqslant \bar{u} \leqslant R$, то из (6.32) получаем левое неравенство (6.30). Аналогично получается и правое неравенство (6.30). Теорема доказана.

Заметим, что аналогично может быть получена асимптотическая теорема двойственности как для пары задач (6.18), (6.18)*, так и для частных реализаций этой пары.

§ 7. Условия разрешимости задачи C

В общем случае, как уже отмечалось, разрешимость задачи (6.2) не гарантируется, но конечность ее оптимального значения при достаточно больших R_j и r_i $(j = 1, \ldots, m_0;\ i = 1, \ldots, n_0)$ гарантируется (это следует из теоремы (6.1)). В ряде частных реализаций задачи (например, для (6.18), (6.19) и др.) свойство разрешимости выполняется автоматически, что и зафиксировано в соответствующих теоремах. В других случаях требуются некоторые предположения, связанные, с одной стороны, с необходимостью некоторых ограничений на выбор параметров R_j и r_i, а с другой — с обеспечением достижимости верхней грани в задаче C.

7.1. Условия разрешимости задачи (6.26). Задача (6.26) возникает в методах точных штрафных функций для задач линейного программирования [27]. Дело в том, что если L разрешима и $\tilde{u}^T = [\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m]$ — некоторый оптимальный вектор задачи L^*, то при $R_j \geqslant \tilde{u}_j$ $\forall j > k$ оптимальные значения задач L и (6.26) совпадают, а при $R_j > \tilde{u}_j$ $\forall j > k$ совпадают и их оптимальные множества [27]. В случае же, когда неравенства $R_j \geqslant \tilde{u}_j$ не выполняются, задача (6.26) может быть и неразрешимой. Следовательно, вопрос об условиях разрешимости задачи (6.26) возникает и тогда, когда L разрешима.

Дадим ответ на поставленный вопрос в общем случае (применительно к задаче (6.26)).

Теорема 7.1. *Задача* (6.26) *разрешима тогда и только тогда, когда система линейных неравенств*

$$A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad u_j \leqslant R_j \quad \forall j > k \tag{7.1}$$

совместна.

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 6.12.

Частный случай этой теоремы, отнесенный к задаче (6.25), может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 7.2. *Задача* (6.25) *разрешима тогда и только тогда, когда* $R_0 \geqslant \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} u_j$ *при* $A^T u \geqslant c$, $u \geqslant 0$.

7.20. Условия разрешимости задачи (6.20). Разрешимость задачи (6.20) связана, очевидно, с совместностью системы неравенств

$$A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0, \quad \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0. \tag{7.2}$$

Введем условие (А): из того, что в задаче C $\tilde{f} < +\infty$, следует достижимость верхней грани. Это условие автоматически выполняется, если, например, (6.2) — l-задача, или когда $B_0 = \varnothing$.

Теорема 7.3. *Пусть для* C *выполнено условие* (А) *и система* (6.5) *совместна. Тогда задача* C *разрешима в том и только том случае, когда система* (7.2) *совместна.*

При обосновании достаточно воспользоваться теоремой 6.5.

§ 8. Условия оптимальности

Речь идет об условиях, гарантирующих для допустимых векторов $\bar{x}$ и $\bar{u}$ их оптимальность в задачах C и C^*. Для разрешимых задач выпуклого программирования общего вида эти условия достаточно просты. Для задач же C и C^* они записываются несколько сложнее, точнее, более громоздко.

Условия оптимальности для допустимых векторов $\bar{x}$ и $\bar{u}$ могут быть получены на основе схемы, дающей условия оптимальности Куна — Таккера для разрешимых задач выпуклого программирования: вектор ограничений прямой (двойственной) задачи, вычисленный в точке $\bar{x}$ (в точке $\bar{u}$), должен быть ортогонален вектору множителей Лагранжа $\bar{u}$ (вектору $\bar{x}$). Например, для задач ЛП (6.1) и (6.1)$^{\#}$ эти условия выглядят так:

$$(A\bar{x} - b,\ \bar{u}) = 0, \quad (A^T\bar{u} - c, \bar{x}) = 0.$$

Выпишем соотношения

$$(A_j\bar{x} - b^j - (A_j\bar{x} - b^j)^+,\ \bar{u}^j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m_0, \tag{8.1}$$

$$(A_0\bar{x} - b^0,\ \bar{u}^0) = 0, \tag{8.2}$$

$$\left\|(c^i - B_i^T\bar{u})^+\right\|^*_{q(i)}\left(\left\|\bar{x}^i\right\|_{q(i)} - r_i\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_0, \tag{8.3}$$

$$\left(c^i - B_i^T\bar{u} - (c^i - B_i^T\bar{u})^+, \bar{x}^i\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n_0, \tag{8.4}$$

$$\left(c^0 - B_0^T\bar{u}, \bar{x}^0\right) = 0, \tag{8.5}$$

$$\left\|(A_j\bar{x} - b_j)^+\right\|_{p(j)}\left(\left\|\bar{u}^j\right\|^*_{p(j)} - R_j\right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m_0, \tag{8.6}$$

$$\left((A_j\bar{x} - b^j)^+, \bar{u}^j\right) = \left\|(A_j\bar{x} - b^j)^+\right\|_{p(j)}\left\|\bar{u}^j\right\|^*_{p(j)}, \quad j = 1, \ldots, m_0, \tag{8.7}$$

$$\left((c^i - B_i^T\bar{u})^+, \bar{x}^i\right) = \left\|(c^i - B_i^T\bar{u})^+\right\|^*_{q(i)}\left\|\bar{x}^i\right\|_{q(i)}, \quad i = 1, \ldots, n_0. \tag{8.8}$$

Теорема 8.1. *Пусть задача C удовлетворяет условиям теоремы 6.2. Тогда для допустимых относительно задач C и $C^{\#}$ векторов $\bar{x}$ и $\bar{u}$ выполняются соотношения* (8.1)—(8.8).

Обратно, если $\bar{x}$ и $\bar{u}$ допустимы и выполнены условия (8.1)—(8.8), *то $\bar{x}$ и $\bar{u}$ оптимальны для C и $C^{\#}$.*

Доказательство. Докажем необходимость условий (8.1)—(8.8). Из вида функции Лагранжа $F(x, t;\ u, v)$, поставленной в соответствие задаче (6.7) (последняя, как отмечалось ранее, эквивалентна задаче (6.2) в смысле совпадения их оптимальных множеств), следует, что $[\bar{x}, \bar{t}]$, где

$$\bar{t} = \left[\bar{t}^1, \ldots, \bar{t}^{m_0}\right], \quad \bar{t}^j = \left(A_j\bar{x} - b^j\right)^+, \quad j = 1, \ldots, m_0,$$

является оптимальным вектором задачи (6.7) и одновременно вектором из оптимального множества

$$\mathrm{Arg}_{[x,t]} \max_{[x,t]\geqslant 0} \min_{[u,v]\geqslant 0} F(x, t;\ u, v).$$

Отсюда вытекают условия ортогональности (8.1). Так как $\bar{u}_0$ — вектор двойственных оценок, отвечающий подсистеме неравенств $A_0x \leqslant b^0$, то соотношение (8.2) также выполняется. Далее, если $\bar{v}^i$ $(i=1, \ldots, n_0)$ — оптимальные множители Лагранжа, отвечающие ограничениям $\|x^i\|_{q(i)} \leqslant \leqslant r_i$ $(i=1, \ldots, n_0)$, то с использованием лемм 6.3 и 6.4 получаем $\bar{v}_i = \|(c^i - B_i^T\bar{u})^+\|^*_{q(i)}$ $(i=1, \ldots, n_0)$. Отсюда в силу условий ортогональности получаются соотношения (8.3). Что касается условий (8.4)—(8.6), то они получаются аналогично, только рассуждения необходимо проводить для задачи (6.17), как эквивалента задачи (6.2)*, и ее функции Лагранжа

$$F^{\#}(u, v; x, t) = (b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \|v^i\|^*_{q(i)} + \\ + \sum_{i=1}^{n_0} (c^i - B_i^T u - v^i, x^i) + \sum_{j=1}^{m_0} t_j \left(\|u^j\|^*_{p(j)} - R_j\right) + \\ + (c^0 - B_0^T u, x^0),$$

в которой $\left[x^0, x^1, \ldots, x^{m_0}; t_1, \ldots, t_{m_0}\right]$ — вектор неотрицательных множителей Лагранжа, отвечающих соответственно следующим группам ограничений задачи (6.17):

$$c^0 - B_0^T u \leqslant 0; \quad c^i - B_i^T u \leqslant v^i, \quad i = 1, \ldots, n_0; \\ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j, \quad j = 1, \ldots, m_0.$$

Теперь докажем соотношения (8.7) и (8.8). Если хотя бы одно из указанных равенств нарушается, то в следующей цепочке преобразований (и оценок)

$$f[R](\bar{x}) = (c, \bar{x}) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|(A_j\bar{x} - b^j)^+\|_{p(j)} \overset{(8.6)}{=\!=} \\ = (c, \bar{x}) - \sum_{j=1}^{m_0} \|(A_j\bar{x} - b^j)^+\|_{p(j)} \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)} \leqslant \\ \leqslant (c, \bar{x}) - \sum_{j=1}^{m_0} \left((A_j\bar{x} - b^j)^+, \bar{u}^j\right) \overset{(8.1)}{=\!=} (c, \bar{x}) - \\ - \sum_{j=1}^{m_0} (A_j\bar{x} - b^j, \bar{u}^j) \overset{(8.2)}{=\!=} (c, \bar{x}) - (A\bar{x} - b, \bar{u}) = \\ = (b, \bar{u}) + (c - A^T\bar{u}, \bar{x}) = (b, \bar{u}) + \\ + \sum_{i=0}^{n_0} (c^i - B_i^0\bar{u}, \bar{x}^i) \overset{(8.4;8.5)}{=\!=\!=} (b, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{n_0} \left((c^i - B_i^T\bar{u})^+, \bar{x}^i\right) \leqslant$$

$$\leqslant (b, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{n_0} \left\| \left(c^i - B_i^T \bar{u}\right)^+ \right\|_{q(i)}^* \left\| \bar{x}^i \right\|_{q(i)} \overset{(8.3)}{=\!=} (b, \bar{u}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_0} r_i \left\| \left(c^i - B_i^T \bar{u}\right)^+ \right\|_{q(i)}^* = f^\# [r] (\bar{u}) \qquad (8.9)$$

возникает хотя бы одно строгое неравенство $<$, что будет противоречить совпадению оптимальных значений задач C и $C^\#$, т. е. равенству $f[R](\bar{x}) = f^\#[r](\bar{u})$.

Итак, необходимость условий (8.1)—(8.2) доказана. Достаточность вытекает из того, что цепочка преобразований (8.9) будет иметь место, если в ней повсюду заменить неравенства $\leqslant$ на равенства, что дает $f[R](\bar{x}) = f^\#[r](\bar{u})$. В силу следствия 6.1 отсюда получаем $\bar{x} \in \operatorname{Arg} C$, $\bar{u} \in \operatorname{Arg} C^\#$, что и требовалось.

Заметим, что для пары задач (6.18) и (6.18)$^\#$ условия оптимальности принимают вид

$$(A\bar{x} - b - (A\bar{x} - b)^+,\ \bar{u}) = 0, \quad ((c - A^T\bar{u})^+,\ \bar{x} - r) = 0,$$

$$(8.10)$$

$$(c - A^T\bar{u} - (c - A^T\bar{u})^+,\ \bar{x}) = 0, \quad ((A\bar{x} - b)^+,\ \bar{u} - R) = 0.$$

§ 9. Аппроксимационный смысл задач C и $C^\#$

9.1. Характеристическое уравнение и связь его решений с решениями задач C и $C^\#$. При неотрицательных x и u векторы $(Ax - b)^+$ и $(c - A^T u)^+$ дают невязки для систем ограничений задач (6.1) и (6.1)$^\#$. Для этих невязок введем обозначения $\Delta_x b$ и $\Delta_u c$ соответственно. Если зафиксировать $\bar{x} \geqslant 0$ и $\bar{u} \geqslant 0$, то задачи

$$\max \left\{ \left(c - \Delta_{\bar{u}} c, x\right) \colon\ Ax \leqslant b + \Delta_{\bar{x}} b,\ x \geqslant 0 \right\}, \qquad (9.1)$$

$$\min \left\{ \left(b + \Delta_{\bar{x}} b, u\right) \colon\ A^T u \geqslant c - \Delta_{\bar{u}} c,\ u \geqslant 0 \right\} \qquad (9.1)^\#$$

будут регулярно двойственными.

Пару векторов $\bar{x} \geqslant 0$ и $\bar{u} \geqslant 0$ будем называть *стационарной* для задач (6.1) и (6.1)$^\#$, если $\bar{x}$ оптимально для (9.1), $\bar{u}$ — для (9.1)$^\#$.

Легко видеть, что пара $\{\bar{x} \geqslant 0,\ \bar{u} \geqslant 0\}$ стационарна тогда и только тогда, когда она решает *характеристическое* уравнение

$$(c - (c - A^T u)^+,\ x) = (b + (Ax - b)^+,\ u). \qquad (9.2)$$

Теорема 9.1. *Если* $[\bar{x}, \bar{u}] \in \operatorname{Arg} C \times \operatorname{Arg} C^{\#}$, *то пара* $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ *является стационарной, т. е. удовлетворяет уравнению* (9.2).

Доказательство получается из следующих выкладок:

$$(c-(c-A^T\bar{u})^+, \bar{x}) \overset{(8.5)}{=\!=} (c, \bar{x}) - \sum_{i=0}^{n_0} ((c^i - B_i^T\bar{u})^+, \bar{x}^i) =$$

$$\overset{(8.4;8.5)}{=\!=} (c, \bar{x}) - \sum_{i=0}^{n_0} (c^i - B_i^T\bar{u}, \bar{x}^i) = (A^T\bar{u}, \bar{x}) =$$

$$= (A\bar{x}, \bar{u}) = (b, \bar{u}) + \sum_{j=0}^{m_0} (A_j\bar{x} - b^j, \bar{u}^j) \overset{(8.1;8.2)}{=\!=}$$

$$= (b, \bar{u}) + \sum_{j=0}^{m_0} ((A_j\bar{x} - b^j)^+, \bar{u}^j) = (b, \bar{u}) + ((A\bar{x} - b)^+, \bar{u}) =$$

$$= (b + (A\bar{x} - b)^+, \bar{u}).$$

Заметим, что стационарная пара точек $\bar{x} \geqslant 0$ и $\bar{u} \geqslant 0$ не обязана решать задачи C и $C^{\#}$ в общем случае. Но при некоторых дополнительных предположениях это так. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{u}$ удовлетворяют ограничениям $A_0x \leqslant b^0$ и $B_0^Tu \geqslant c^0$ соответственно, и кроме того, выполняются условия (8.7) и (8.8). Тогда, если в задачах C и $C^{\#}$ положить $r_i = \|\bar{x}^i\|_{q(i)}$, $i = 1, \ldots, n_0$, $R_j = \|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}$, $j = 1, \ldots, m_0$, то

$$[\bar{x}, \bar{u}] \in \operatorname{Arg} C \times \operatorname{Arg} C^{\#}.$$

Это вытекает из того, что для рассматриваемого случая выполняются условия оптимальности (8.1)—(8.6).

Для задач (6.18) и $(6.18)^{\#}$ сказанное выражает

Теорема 9.2. *Пусть пара* $\{\bar{x} \geqslant 0, \bar{u} \geqslant 0\}$ *является стационарной, и в задачах* C_1 *и* $C_1^{\#}$ $[r, R] = [\bar{x}, \bar{u}]$. *Тогда* $[\bar{x}, \bar{u}] \in \operatorname{Arg} C_1 \times \operatorname{Arg} C_1^{\#}$.

Доказательство следует непосредственно из условий оптимальности (8.10).

9.2. Связь с последовательной оптимизацией. Пусть G_0 — непустое выпуклое замкнутое множество из $\mathbf{E}_n$; $f_0(x), \ldots, f_s(x)$ — упорядоченная система выпуклых функций, заданных на $\mathbf{E}_n$. Определим последовательность задач

$$\min\{f_0(x) \colon x \in G_0\}, \tag{9.3}$$

$$\min\{f_i(x) \colon x \in G_i\}, \tag{9.4}$$

где $G_i = \operatorname{Arg\,min}\{f_{i-1}(x):\ x \in G_{i-1}\}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Под задачей последовательного программирования относительно упорядоченной системы функций $f_0(x), \ldots, f_s(x)$ понимают заключительную из задач (9.4), т. е. задачу

$$\min\{f_s(x):\ x \in G_s\}. \tag{9.5}$$

Ниже нас будет интересовать ситуация, когда G_0 — выпуклое полиэдральное множество (т. е. множество, задаваемое конечной системой линейных неравенств), $\{f_i(x)\}$ — выпуклые кусочно-линейные функции. Функция $g(x)$ называется *выпуклой кусочно-линейной*, если она представима в виде $\max\limits_{i \in I}\{(h_i, x) - \alpha_i\}$; здесь I — конечное множество индексов. Класс таких функций обозначим через K. Известно, что если $\{g_t(x)\}$ — конечная совокупность функций из класса K, то $\sum\limits_t \alpha_t g_t^+(x) + g_0(x) \in K$ при любых $\alpha_t \geqslant 0$ и линейной функции $g_0(x)$.

Задачу (9.5) назовем *l-регулярной*, если G_0 — выпуклое полиэдральное множество, $\{f_i(t)\} \subset K$.

Положим $\Phi_0(x) = f_0(x)$, $\Phi_i(x, r_1, \ldots, r_i) = f_i(x) + r_i\Phi_{i-1}(x, r_1, \ldots, r_{i-1})$, где $r_i > 0$ $(i = 1, \ldots, s)$. Задаче (9.4) поставим в соответствие задачу

$$\min\{\Phi_i(x, r_1, \ldots, r_i):\ x \in G_0\}, \tag{9.6}$$

и пусть $E_i = E_i(r_1, \ldots, r_i)$, $i = 0, \ldots, s$,— ее оптимальное значение.

Теорема 9.3 [32]. *Пусть задача* (9.5) *разрешима в точке* x_0 *и l-регулярна. Тогда*:

1) *Оптимальные множества задач* (9.4) *и* (9.6) *при* $i = 1$ *совпадают, если* $r_1 > u_0^0$ — *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $\Phi_0(x) \leqslant E_0$ *в задаче*

$$\min\{f_1(x):\ x \in G_1 = G_0 \cap \{x:\ \Phi_0(x) \leqslant E_0\}\}.$$

2) *Если выбор* $r_2 > 0, \ldots, r_i > 0$ *обеспечил совпадение оптимальных множеств задач* (9.4) *и* (9.6) *при* $i \leqslant t < s$, *то*

$$\operatorname{Argmin}\{f_{t+1}(x):\ x \in G_{t+1}\} = \operatorname{Argmin}\{\Phi_{t+1}(x, r_1, \ldots, r_{t+1}):\ x \in G_0\},$$

если $r_{t+1} > u_t^0(r_1, \ldots, r_t)$. *Здесь* $u_t^0(r_1, \ldots, r_t)$ — *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $\Phi_t(x, r_1, \ldots, r_t) \leqslant E_t$ *в задаче*

$$\min\{f_{t+1}(x):\ x \in G_{t+1} \cap \{x:\ \Phi_t(x, r_1, \ldots, r_t) \leqslant E_t\}\}$$

(*последняя эквивалентна задаче* (9.4) *при* $i = t + 1$).

Приведенная теорема будет нами использована для выяснения аппроксимационного смысла задачи (6.2). Пусть в задаче (6.2) $R_j = R_0 v_j$, $v_j > 0$ $(j = 1, \ldots, m_0)$

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{m_0} v_j \left\| \left(A_j x - b^j\right)^+ \right\|_{p(j)}.$$

Введем обозначения

$$M_0' = \{x \geqslant 0:\ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, n_0,$$
$$A_0 x \leqslant b^0\},\quad \widetilde{M}_0 = \operatorname{Arg\,min}\{f_0(x):\ x \in M_0'\}.$$

Выпишем задачу

$$\max\{(c, x):\ x \in M_0'\}. \tag{9.7}$$

Если $\min\{f_0(x):\ x \in M_0'\} = \alpha$, то $\widetilde{M}_0 = \{x : f_0(x) \leqslant \alpha\} \cap M_0'$, и задача (9.7) перепишется в виде

$$\max\{(c, x):\ f_0(x) \leqslant \alpha,\ x \in M_0'\}. \tag{9.8}$$

Напомним: условия, гарантирующие для (9.8) справедливость теоремы Куна — Таккера, носят название *условий регулярности.* Они обеспечивают для функции Лагранжа $T(x, u) = (c, x) - u[f_0(x) - \alpha]$, поставленной в соответствие задаче (9.8), существование седловой точки $[\bar{x}, u_0] \geqslant 0$ на $M_0' \times \mathbf{R}_+$, т. е.

$$T(x, u_0) \leqslant T(\bar{x}, u_0) \leqslant T(\bar{x}, u) \quad \forall\, [x, u] \in M_0' \times \mathbf{R}_+; \tag{9.9}$$

здесь $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел.

Если C — l-задача, то существование для $T(x, u)$ седловой точки $[\bar{x}, u_0]$ обеспечено (см. § 2).

Теорема 9.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2 *и формулы* (9.9). *Тогда при* $R_0 > u_0$ *множества оптимальных решений задач* (6.2) *и* (9.7) *совпадают.*

Доказательство. Пусть $\overline{M}_0$ — множество оптимальных решений задачи (9.7). По теореме 25.1 [36]

$$\overline{M}_0 = \operatorname{Arg\,max}\{(c, x) - R_0[f_0(x) - \alpha]^+:\ x \in M_0'\}.$$

Но так как $f_0(x) \geqslant \alpha$ $\forall x \in M_0'$, то $\overline{M}_0 = \operatorname{Arg\,max}\{(c, x) - R_0 f_0(x): x \in M_0'\}$. Учитывая равенство

$$(c, x) - R_0 f_0(x) = (c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \left\| \left(A_j x - b^j\right)^+ \right\|_{p(j)},$$

получаем утверждение теоремы.

Замечание 9.1. Пусть (6.2) — l-задача; тогда теорема 9.4 справедлива без предположения (9.9), ибо последнее в этом случае выполняется автоматически.

Следствие 9.1. *В условиях теоремы* 6.6 *при* $R_0 > u_0$ *справедливо соотношение*

$$\bar{M} = \operatorname{Arg}\max\{(c,\ x):\ x \in \tilde{M}_0\},$$

где $\tilde{M}_0 = \operatorname{Arg}\min\{f_0(x):\ x \in M_0\}$, $M_0 = \{x \geqslant 0:\ A_0x \leqslant b^0\}$, $\bar{M}$ — *множество оптимальных решений задачи* (6.2), *а* $f_0(x)$ *и* u_0 *имеют тот же смысл, что и в теореме* 9.4.

Следствие 9.2. *При достаточно большом* R_0 *справедливо соотношение* $\bar{M}' = \operatorname{Arg}\max\{(c,\ x):\ x \in \tilde{M}\}$, *где* $\tilde{M} = \operatorname{Arg}\min\{(v,\ (Ax - b)^+):\ 0 \leqslant x \leqslant r\}$, $R_j = R_0 v_j$, $v = [v_1,\ \ldots,\ v_m] > 0$, $\bar{M}'$ — *множество оптимальных решений задачи* (6.18).

Выбор величин $R_j > 0$ свяжем с одной постановкой задачи последовательного программирования. Поставим задаче (6.2) в соответствие задачу последовательного программирования

$$\max\left\{(c,\ x):\ x \in M'_{m_0}\right\}, \tag{9.10}$$

где M'_{m_0} определяется последним соотношением индуктивной последовательности

$$M'_j = \operatorname{Arg}\min\left\{\left\|(A_jx - b^j)^+\right\|_{p(j)}:\ x \in M'_{j-1}\right\}$$

$(j = 1, \ldots, m_0)$, при этом $M'_0 = \{x \geqslant 0:\ A_0x \leqslant b^0,\ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r,\ i = 1, \ldots, n_0\}$. Пусть M'_{m_0+1} — множество оптимальных решений задачи (9.10),

$$f_j(x) = \left\|(A_jx - b^j)^+\right\|_{p(j)}\ (j = 1, \ldots, m_0),\ f_{m_0+1}(x) = -(c, x).$$

Введем $\Phi_{j+1}(x;\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_j) = f_{j+1}(x) + \gamma_j\Phi_j(x;\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{j-1})$ $(j = 1,\ \ldots,\ m_0)$, полагая $\Phi_1(x) = f_1(x)$. Запишем последовательность задач:

$$\min\{\Phi_j(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}):\ x \in M'_0\}. \tag{9.11}$$

Их оптимальные значения обозначим через $E_j = E_j(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_{j-1})$ $(j = 1,\ \ldots,\ m_0 + 1)$. Константы $\{R_j\}$ и $\{\gamma_j\}$ свяжем соотношениями $R_j = \gamma_j \times \ldots \times \gamma_{m_0}$ $(j = 1, \ldots, m_0)$. Тогда задачи (6.2) и (9.11) при $j = m_0 + 1$ эквивалентны.

Теорема 9.5. *Пусть* (6.2) *является* l-*задачей*, $r \in Q = \{r \geqslant 0:\ M'_0\} \neq \varnothing$.

1) *Если* $\gamma_1 > \bar{u}_1$, *где* $\bar{u}_1$ — *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $\Phi_1(x) \leqslant E_1$ *в задаче*

$$\min\{\|(A_2x - b^2)^+\|_{p(2)}:\ x \in M_1' \cap \{x:\ \Phi_1(x) \leqslant E_1\}\},$$

то $\operatorname{Arg\,min}\{\Phi_2(x, \gamma_1):\ x \in M_0'\} = M_2'$.

2) *Если выбор* $\gamma_i > 0$ $(i = 1, \ldots, t-1)$ *уже обеспечил равенства* $\operatorname{Arg\,min}\{\Phi_j(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}):\ x \in M_0'\} = M_j'$, $\forall j$: $j \leqslant t \leqslant m_0$, *то при* $\gamma_t > \bar{u}_t(\gamma_1, \ldots, \gamma_{t-1}) = \bar{u}_t$, *где* $\bar{u}_t$ — *двойственная оценка, отвечающая неравенству* $\Phi_t(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-1}) \leqslant E_t$ *в задаче*

$$\min\{\|(A_tx - b^t)^+\|_{p(t)}:\ x \in M_t' = M_0' \cap \{x: \Phi_t(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-1}) \leqslant E_t\}\},$$

имеем

$$\operatorname{Arg\,min}\{\Phi_{t+1}(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_t):\ x \in M_0'\} = M_{t+1}'. \qquad (9.12)$$

В частности, при $t = m_0$ из (9.12) следует, что множества оптимальных решений задач (6.2) и (9.11) совпадают. Заметим, что условия теоремы обеспечивают для всех фигурирующих в ее формулировке задач существование оценок $\bar{u}_j$ $(j = 1, \ldots, m_0)$. Теорема 9.5 не требует самостоятельного доказательства, ибо возникает как переформулировка теоремы 9.3 применительно к рассматриваемой ситуации.

§ 10. О теоремах (#)-двойственности применительно к собственным задачам линейного программирования

Различные факты, связывающие задачи C и $C^{\#}$, не теряют своей содержательности и в случае, когда L и L^* — задачи разрешимые, т. е. собственные. В частности, здесь обнаруживается связь задач C и $C^{\#}$ с методами штрафных функций, позволяющими задачи с ограничениями сводить к задачам без ограничений, либо к задачам при частично снятых ограничениях.

10.1. Связь с методом точных штрафных функций. Ниже будет получен результат, связанный с уяснением смысла задачи (6.2), но записанной не для задачи ЛП (6.1), а для задачи выпуклого программирования

$$\max\{f_0(x):\ f_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\ x \geqslant 0\}; \qquad (10.1)$$

здесь $\{-f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ — выпуклые функции, за-данные на $\mathbf{E}_n$. Двойственную к (10.1) задачу запишем в форме

$$\min_{u\geqslant 0}\max_{x\geqslant 0} F(x, u), \tag{10.1$^{\#}$}$$

где $F(x, u) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$ —функция Лагранжа. По определению, задача (10.1) — собственная тогда и только тогда, когда (10.1) и (10.1)$^{\#}$ разрешимы и их оптимальные значения совпадают.

Пусть задача (10.1) — собственная и $\bar{x}$ — ее оптимальное решение; тогда при некотором $\bar{u}\geqslant 0$ $[\bar{x}, \bar{u}]$ — оптимальное решение задачи (10.1)$^{\#}$, что эквивалентно неравенствам

$$F(x,\bar{u})\leqslant F(\bar{x},\bar{u})\leqslant F(\bar{x}, u) \quad \forall x\geqslant 0, \quad \forall u\geqslant 0, \tag{10.2}$$

т. е. $[\bar{x}, \bar{u}]$ — седловая точка для $F(x, u)$.

Положим $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)] = [F_0(x), F_1(x), \ldots \ldots, F_{m_0}(x)]$, так что $F_j(x)\leqslant 0$ — некоторые подсистемы системы ограничений задачи (10.1). Подсистему $F_0(x)\leqslant 0$, $x\geqslant 0$ будем предполагать совместной. Запишем задачу

$$\max\left\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j\|F_j^+(x)\|_{p(j)}\colon\ F_0(x)\leqslant 0,\ x\geqslant 0\right\}, \tag{10.3}$$

где, как и в линейном случае, $\{\|\cdot\|_{p(j)}\}$ — произвольные нормы соответствующих конечномерных пространств, $R_j>0$ $(j=1, \ldots, m_0)$. Наравне с (10.3) построим аналог задачи (6.2), соотнеся его к случаю (10.1):

$$\max\left\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j\|F_j^+(x)\|_{p(j)}\colon\ F_0(x)\leqslant 0,\right.$$

$$\left. x\geqslant 0,\ \|x^i\|_{q(i)}\leqslant r_i,\ i=1, \ldots, n_0\right\}; \tag{10.4}$$

здесь $x = [x^0, \ldots, x^{n_0}]$.

Выделим условия:

$$R_j\geqslant\|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}, \quad j=1, \ldots, m_0, \tag{10.5}$$

а также

$$R_j>\|\bar{u}^j\|^*_{p(j)}, \quad j=1, \ldots, m_0; \tag{10.6}$$

здесь $[\bar{u}^0, \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^{m_0}] = \bar{u}, \bar{u}^j$ имеет размерность вектора $F_j(x)$.

Теорема 10.1. *Пусть задача* (10.1) — *собственная и* $[\bar{x}, \bar{u}]$ *удовлетворяют* (10.2). *Тогда при условиях* (10.5) *справедливо равенство оптимальных значений, а при условиях* (10.6) — *совпадение множеств оптимальных решений задач* (10.1) *и* (10.3).

Доказательство. Пусть $f_R(x) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \times \| F_j^+(x)\|_{p(j)}$, $\tilde{f}$ и $\tilde{f}_R$ — оптимальные значения задач (10.1) и (10.3). Имеем $f_R(\bar{x}) = f_0(\bar{x}) = \tilde{f}$, следовательно, $\tilde{f}_R \geqslant \tilde{f}$. Докажем обратное неравенство $\tilde{f}_R \leqslant \tilde{f}$. В выкладках ниже будут учтены соотношение $F(\bar{x}, \bar{u}) = \tilde{f}$ и левое неравенство из (10.2) для всех $x \geqslant 0$ таких, что $F_0(x) \leqslant 0$. Имеем:

$$f_R(x) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| F_j^+(x)\|_{p(j)} \leqslant$$

$$\leqslant F(x, \bar{u}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i f_i^+(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| F_j^+(x)\|_{p(j)} \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{f} + \sum_{j=1}^{m_0} \| \bar{u}^j \|^*_{p(j)} \| F_j^+(x)\|_{p(j)} - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \| F_j^+(x)\|_{p(j)} \leqslant \tilde{f}, \quad (10.7)$$

т. е. $\tilde{f}_R \leqslant \tilde{f}$, а потому $\tilde{f}_R = \tilde{f}$. Отсюда сразу же вытекает включение $M \subset N = \operatorname{Arg\,max}\{f_R(x)\colon F_0(x) \leqslant 0,\ x \geqslant 0\}$, где M — множество оптимальных решений задачи (10.1). С другой стороны, если $\bar{x} \in N$, то соотношение

$$\tilde{f} \leqslant \tilde{f} - \sum_{j=1}^{m_0} (-R_j + \| \bar{u}^j \|^*_{p(j)}) \| F_j^+(\bar{x})\|_{p(j)},$$

вытекающее из (10.7), дает $\| F_j^+(\bar{x})\|_{p(j)} = 0$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, а потому $f_j(\bar{x}) \leqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Следовательно, $\bar{x} \in M$ и $N \subset M$. Так как обратное включение было доказано, то утверждение теоремы справедливо.

Обратимся к задаче (10.4), оставаясь в предположениях предыдущей теоремы. Выделим ограничения

$$\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i, \qquad i = 1, \ldots, n_0. \quad (10.8)$$

Если $\bar{x}$ — оптимальное решение (10.3) и r_i взяты так, чтобы векторы $\bar{x}_i$ удовлетворяли ограничениям (10.8), то эти ограничения в (10.4) перестают быть существенными в том смысле, что $\bar{x}$ остается оптимальным вектором и для (10.4). Это можно переформулировать так: при достаточно больших r_i (а именно, таких, что при некотором $\bar{x}$, оптимальном для (10.3), $\|\bar{x}^i\|_{q(i)} \leqslant r_i$ $(i=1, \ldots, n_0)$) справедливы соотношения $\tilde{f}_R = \tilde{f}^r_R$, и, следовательно, при условиях (10.5)

$$\tilde{f} = \tilde{f}^r_R, \tag{10.9}$$

где $\tilde{f}^r_R$ — оптимальное значение задачи (10.4), а также

$$M \cap M_r \neq \varnothing, \tag{10.10}$$

где M и M_r — множества оптимальных решений задач (10.1) и (10.4). Таким образом, справедлива

Теорема 10.2. *Пусть задача* (10.1) — *собственная и* $[\bar{x}, \bar{u}]$ — *из* (10.2). *Тогда при* $r_i \geqslant \|\bar{x}^i\|_{q(i)}$ $(i=1, \ldots, n_0)$ *и* (10.5) *справедливо* (10.9), *а при* (10.6) *справедливо соотношение* (10.10).

10.2. Линейный случай. Пусть (10.1) — задача (6.1), т. е.

$$L\colon \max\{(c, x)\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\};$$

двойственная к ней такова:

$$L^*\colon \min\{(b, u)\colon A^{\mathrm{T}}u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}.$$

Ниже будем исходить из предположения разрешимости (собственности) одной из них, следовательно, разрешимости и другой. Для этого случая множество седловых точек $[\bar{x}, \bar{u}]$ из (10.2) будет совпадать с декартовым произведением $\operatorname{Arg} L \times \operatorname{Arg} L^*$.

Обозначая через $M(r)$ и $M^{\#}(R)$ допустимые множества для задач C и $C^{\#}$, т. е. для задач

$$C\colon \max\Big\{(c, x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \big\|(A_j x - b^j)^+\big\|_{p(j)}\colon A_0 x \leqslant b^0,$$

$$x \geqslant 0,\ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, n_0\Big\},$$

$$C^{\#}\colon \min\Big\{(b, u) + \sum_{i=1}^{n_0} r_i \big\|(c^i - B_i^T u)^+\big\|_{q(i)}\colon B_0^T u \geqslant c^0,$$

$$u \geqslant 0,\ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j,\ j = 1, \ldots, m_0\Big\},$$

теорему 10.1 применительно к задачам L и L^* можно переформулировать (используя краткую запись условий) следующим образом. Пусть

$$M(r) \cap \operatorname{Arg} L \neq \varnothing, \quad M^{\#}(R) \cap \operatorname{Arg} L^* \neq \varnothing; \tag{10.11}$$

тогда

$$\begin{gathered} \operatorname{opt} C = \operatorname{opt} L, \quad \operatorname{opt} C^{\#} = \operatorname{opt} L^*, \\ \operatorname{Arg} C \cap \operatorname{Arg} L \neq \varnothing, \quad \operatorname{Arg} C^{\#} \cap \operatorname{Arg} L^* \neq \varnothing. \end{gathered} \tag{10.12}$$

Так как для разрешимых задач ЛП $\operatorname{opt} L = \operatorname{opt} L^*$, то справедлива

Теорема 10.3. *Если* $\{R_j\}$ *и* $\{r_i\}$ *выбраны так, что выполняются условия* (10.11), *то выполняются соотношения* (10.12) *и*

$$\operatorname{opt} C = \operatorname{opt} C^{\#} = \operatorname{opt} L = \operatorname{opt} L^*.$$

Этой теореме можно было бы дать частные реализации, соответствующие частным реализациям задач C и $C^{\#}$, однако мы этого делать не будем, так как читатель при необходимости может это проделать самостоятельно. Однако следует подчеркнуть, что при тех или иных частных реализациях задач C и $C^{\#}$ (а их в § 6 было рассмотрено достаточно много) могут возникать (и на самом деле возникают) свои особенности в формулировках теорем — аналогов теоремы 10.3. Эти особенности могут быть связаны, с одной стороны, с ослаблением исходных предположений, а с другой — с более сильными формулировками выводов, например, соотношений (10.12). Проиллюстрируем это на одном примере.

Возьмем пару двойственных задач (6.24) и (6.24)$^{\#}$. Для нее первое условие (10.11) выльется в соотношение $r_0 \geqslant \bar{r} = \min\{\|x\|_q\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}$, а второе выполняется автоматически, так как для этого случая $M^{\#}(R) = \{u \geqslant 0\}$. Если же $r_0 > \bar{r}$, то соотношения (10.12) заменятся на равенства

$$\overline{M} = \operatorname{Arg} L, \quad \overline{M}^{\#} = \operatorname{Arg} L^*,$$

где $\overline{M}$ и $\overline{M}^{\#}$ — множества оптимальных решений задач (6.24) и (6.24)$^{\#}$.

МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Как уже отмечалось во введении, коррекция несобственной задачи ЛП может быть осуществлена на основе разных подходов. Один из них состоит в параметризации задачи и поиске параметра, обеспечивающего разрешимость задачи при найденном значении параметра и оптимальность (по некоторому критерию качества) ему соответствующей коррекции (аппроксимации). Помимо методов, основанных на таком подходе, в данной главе рассмотрены методы итеративной коррекции.

§ 11. Симметрическая коррекция задач ЛП (частный случай)

Выпишем пару двойственных задач ЛП:

$$L\colon \max(c,\ x) \quad L^*\colon \min(b,\ u)$$
$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0; \quad A^T u \geqslant c, \quad u \geqslant 0.$$

Рассмотрим методы их коррекции по b и c. С этой целью задачам L и L^* поставим в соответствие задачи

$$L(\Delta)\colon \max\{(c - \Delta c,\ x)\colon\ Ax \leqslant b + \Delta b,\ x \geqslant 0\},$$
$$L^*(\Delta)\colon \min\{(b + \Delta b,\ u)\colon\ A^T u \geqslant c - \Delta c,\ u \geqslant 0\};$$

здесь $\Delta = [\Delta c,\ \Delta b] \in \mathbf{E}_{n+m}$. Положим

$$K = \{\Delta\colon \text{задача } L(\Delta) \text{ разрешима}\}. \tag{11.1}$$

Рассмотрим методы решения задачи

$$\min\{d(\Delta)\colon\ \Delta \in K\} \tag{11.2}$$

при разных выборах функции качества коррекции $d(\Delta)$.

11.1. Линейная коррекция. Положим $M(\Delta b) = \{x\colon\ Ax \leqslant b + \Delta b,\ x \geqslant 0\}$, $M^*(\Delta c) = \{u\colon\ A^T u \geqslant c - \Delta c,\ u \geqslant 0\}$; тогда

$$K = \{\Delta = [\Delta c,\ \Delta b]\colon\ M(\Delta b) \neq \varnothing,\ M^*(\Delta c) \neq \varnothing\}.$$

Остановимся на анализе задачи (11.2) при $d(\Delta) = \|\Delta\|_1$.

Легко убедиться в том, что множество K, задаваемое согласно (11.1), можно заменить на $K_+ = \{\Delta \in K\colon\ \Delta \geqslant 0\}$, не изменяя оптимального значения задачи (11.2). Тем самым вместо (11.2) можно рассматривать задачу

$$\min\{d(\Delta)\colon\ \Delta \in K_+\},$$

которая распадается на две самостоятельных:

$$\min\{\|\Delta b\|_1\colon\ Ax \leqslant b + \Delta b,\ [\Delta b,\ x] \geqslant 0\}, \qquad (11.3)$$

$$\min\{\|\Delta c\|_1\colon\ A^T u \geqslant c - \Delta c,\ [\Delta c,\ u] \geqslant 0\}. \qquad (11.4)$$

Последние суть задачи ЛП и могут быть решены, например, симплекс-методом. Заметим, что (11.3) и (11.4) можно эквивалентным образом переписать в виде

$$\min_{x \geqslant 0} \|(Ax - b)^+\|_1, \quad \min_{u \geqslant 0} \|(c - A^T u)^+\|_1. \qquad (11.5)$$

Возьмем теперь в качестве $d(\Delta)$ функцию

$$d(\Delta) = \sum_{j=1}^{m} R_j \Delta b_j + \sum_{i=1}^{n} r_i \Delta c_i,$$

которая в содержательном смысле является более интересной; здесь $R_j > 0$, $r_i > 0$ $(j = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$. Аналогами задач (11.5) в этом случае будут

$$\min_{x \geqslant 0} (R, (Ax - b)^+), \qquad (11.6)$$

$$\min_{u \geqslant 0} (r, (c - A^T u)^+). \qquad (11.7)$$

В вопросе коррекции L и L^* задачи (11.6) и (11.7) являются промежуточными: в результате их решения находятся невязки $\overline{\Delta b} = (A\bar{x} - b)^+$ и $\overline{\Delta c} = (c - A^T \bar{u})^+$, где $\bar{x}$, $\bar{u}$ — оптимальные решения задач (11.6), (11.7). Конечной же целью является решение задач $L(\overline{\Delta})$ и $L^*(\overline{\Delta})$, $\overline{\Delta} = [\overline{\Delta c},\ \overline{\Delta b}]$. В ряде случаев поиск $\overline{\Delta}$ и решение, например, задачи $L(\overline{\Delta})$ можно объединить в одну задачу. А именно, пусть L — несобственная задача 1-го рода; тогда $\overline{\Delta c} = 0$, и задача $L(\overline{\Delta})$ запишется в виде

$$\max\{(c,\ x)\colon\ x \in \overline{M}(\overline{\Delta b})\},$$

где $\overline{M}(\overline{\Delta b})$ — множество оптимальных решений задачи (11.6), что эквивалентно задаче

$$\max_{x \geqslant 0} \{(c, x) - \alpha (R, (Ax - b)^+)\}$$

при достаточно большом $\alpha > 0$ (см. § 5). Выписанная задача является выпуклой кусочно-линейной программой и может быть переписана как задача ЛП:

$$\max\left\{(c, x) - \alpha \sum_{j=1}^{m} R_j t_j :\ Ax - b \leqslant t,\ [t, x] \geqslant 0\right\}.$$

Если же L — несобственная задача 2-го рода, то $\overline{\Delta b} = 0$, и задача $L^*(\overline{\Delta})$ запишется в виде

$$\min\{(b, u):\ u \in \overline{M}^*(\Delta c)\},$$

где $\overline{M}^*(\Delta c)$ — множество оптимальных решений задачи (11.7), что эквивалентно задаче

$$\min_{u \geqslant 0}\left\{(b, u) + \beta\left(r, (c - A^T u)^+\right)\right\}$$

при достаточно большом $\beta > 0$ (см. § 5). Эта задача может быть переписана в форме линейной программы:

$$\min\left\{(b, u) + \beta \sum_{i=1}^{n} r_i \mu_i :\ c - A^T u \leqslant \mu,\ [\mu, u] \geqslant 0\right\}.$$

В качестве функции отклонения $d(\Delta)$ можно выбрать $d(\Delta) = d_0(\Delta) =: \|\Delta c\|_0 + \|\Delta b\|_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Delta c_i| + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\Delta b_j|$.

Тогда аналогами задач (11.5) будут:

$$\min_{x \geqslant 0} \max_{1 \leqslant j \leqslant m} l_j^+(x), \quad \min_{u \geqslant 0} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i^+(u),$$

где $\{l_j(x)\}_{j=1}^{m}$ — левые части системы неравенств $Ax - b \leqslant 0$, а $\{h_i(u)\}_{i=1}^{n}$ — левые части системы неравенств $c - A^T u \leqslant 0$. Последние могут быть переписаны в форме задач ЛП:

$$\min\{t:\ l_j(x) \leqslant t\ (j = 1, \ldots, m),\ [x, t] \geqslant 0\},$$
$$\min\{\mu:\ h_i(u) \leqslant \mu\ (i = 1, \ldots, n),\ [u, \mu] \geqslant 0\}.$$

11.2. Квадратичная коррекция. Положим

$$d(\Delta) = \|\Delta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta c_i)^2 + \sum_{j=1}^{m} (\Delta b_j)^2.$$

Следуя схеме получения задач (11.5), приходим к задачам

$$\min\{\|(c - A^T u)^+\|^2:\ u \geqslant 0\}, \tag{11.8}$$

$$\min\{\|(Ax - b)^+\|^2:\ x \geqslant 0\}. \tag{11.9}$$

В соответствии с методами из § 2 можно для задач (11.8) и (11.9) построить итерационные операторы

$$\varphi(u)=\left[u+\frac{\lambda}{\delta}\sum_{i=1}^{n}h_i^+(u)\cdot h_i\right]^+,$$

$$\psi(x)=\left[x-\frac{\lambda}{\mu}\sum_{j=1}^{m}l_j^+(x)\,a_j\right]^+,$$

обладающие свойствами

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^t(u_0)=\overline{u}, \tag{11.10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\psi^t(x_0)=\overline{x}; \tag{11.11}$$

здесь $\lambda\in(0,2),\ \delta=\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|^2,\ \mu=\sum_{j=1}^{m}\|a_j\|^2;\ x_0, u_0$ — произвольные начальные элементы для процессов (11.10) и (11.11), $\overline{u}$, $\overline{x}$ — оптимальные решения задач (11.8) и (11.9).

11.3. Общий случай. Если функция $d(\Delta)=d(\Delta c,\ \Delta b)$ выпукла и сепарабельна по Δc и Δb, т. е. $d(\Delta)=d_c(\Delta c)+d_b(\Delta b)$, то задача коррекции L и L^* по критерию $d(\Delta)$ запишется в виде двух выпуклых программ

$$\min_{u\geqslant 0} d_c\left((c-A^Tu)^+\right),\qquad \min_{x\geqslant 0} d_b\left((Ax-b)^+\right);$$

выше предполагается, что функция отклонения $d(\Delta)$ обладает свойствами $d(0)=0,\ d(\Delta)>0\ \ \forall\,\Delta\geqslant 0,\ \ \Delta\neq 0$.

В случае несепарабельности функции $d(\Delta)$ для задачи коррекции в форме

$$\min_{[x,u]\geqslant 0} D(x,u), \tag{11.12}$$

где $D(x,\ u)=d((c-A^Tu)^+,\ (Ax-b)^+)$, можно предложить следующую процедуру:

$$\begin{aligned} x_{t+1}&=(1-\alpha_t)x_t+\alpha_t\overline{x}_t,\\ u_{t+1}&=(1-\alpha_t)u_t+\alpha_t\overline{u}_t, \end{aligned} \tag{11.13}$$

где $\overline{x}_t\in\operatorname{Arg}\min\limits_{x\geqslant 0} D(x,u_t),\ \overline{u}_t\in\operatorname{Arg}\min\limits_{u\geqslant 0} D(x_t,u),\ \ \alpha_t\geqslant 0,$

$\{\alpha_t\} \to 0$, $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t = +\infty$. При сделанных предположениях процесс (11.13) сходится к оптимальному множеству задачи (11.12).

§ 12. Методы прямой аппроксимации несовместных систем линейных уравнений по совокупности исходных данных

12.1. Многопараметрическая аппроксимация. Пусть дана несовместная система линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{12.1}$$

где $A = [a_{ji}]_{m,n}$, $b = [b_1, \ldots, b_m]^T$, $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$. Применяя идеи общего подхода к аппроксимации несобственных моделей (см. [38], [64, ч. 1]), поставим ей в соответствие систему

$$(A + H)x = b + p \tag{12.2}$$

и множество $K = \{[-p, H]$: система $(A + H)x = b + p$ совместна$\}$, где $H = [h_{ji}]_{m,n}$, $p = [p_1, \ldots, p_m]^T$,

$$[-p, H] = \begin{pmatrix} -p_1 & h_{11} & \ldots & h_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_m & h_{m1} & \ldots & h_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сформулируем задачу аппроксимации:

$$\mathscr{D}\colon \ \inf\{\|[-p, H]\|^2 = \|p\|^2 + \|H\|^2\colon \ [-p, H] \in K\}.$$

Норма матрицы вычисляется по формуле $\|H\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} h_{ji}^2$.

Заметим, что метод наименьших квадратов состоит в отыскании точек множества $\operatorname{Arg\,min}\{\|Ax - b\|^2\colon x \in \mathbf{R}^n\}$ или, что то же самое, множества решений системы $Ax = b + p'$, где p' есть решение задачи

$$\inf\{\|p\|^2\colon \text{система } Ax = b + p \text{ совместна}\}. \tag{12.3}$$

Таким образом, отличие задачи $\mathscr{D}$ от (12.3) состоит в том, что в (12.3) корректируется правая часть ограничений, а в $\mathscr{D}$ — все параметры системы (12.1). Ниже также рассматривается случай, когда часть столбцов матрицы A (и столбец b) фиксированы и не корректируются.

Через $\gamma(V)$, $\Gamma(V)$ будем обозначать наименьшее собственное значение матрицы V и множество соответствующих ему собственных векторов. Множество всех троек (H, p, x), удовлетворяющих (12.2) и равенству $\|[-p, H]\|^2 = \gamma_0$, где γ_0 — оптимальное значение задачи $\mathscr{D}$, обозначим через M. Определим $H(u)$, $p(u)$, $x(u)$ с помощью соотношений

$$[-p(u), H(u)] = -\frac{1}{\|u\|^2} Buu^T, \quad x(u) = \frac{1}{u_0}[u_1, \ldots, u_n]^T,$$

где $B = [-b, A]$, $u = [u_0, u_1, \ldots, u_n]^T$. Рассмотрим задачу

$$\inf\{\|Bu\|^2 \colon u_0 \neq 0, \ \|u\| = 1\}. \tag{12.4}$$

Лемма 12.1. [81]. *Система уравнений $Ax = b$ при заданных $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, $b \in \mathbf{R}^m$ разрешима относительно A. Решение A' этой системы, минимальное по норме, единственно и дается формулой*

$$A' = \frac{1}{\|x\|^2} bx^T, \quad \|A'\| = \frac{\|b\|}{\|x\|}.$$

Доказательство. Очевидно, что для любых фиксированных $x \neq 0$, b_j минимальное по норме решение уравнения (относительно строк a_j) $(a_j, x) = b_j$ единственно и дается формулой $a_j = b_j x^T / \|x\|^2$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$; при этом $\|a_j\| = |b_j| / \|x\|$. Тогда утверждение леммы вытекает из того, что $\|A\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \|a_j\|^2$.

Матрицу $[-p', H'] \in K$ назовем *точкой локального минимума* задачи $\mathscr{D}$, если при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется $\|[-p', H']\|^2 \leqslant \|[-p, H]\|^2$ для всех $[-p, H] \in K$ таких, что $\|[-p + p', H - H']\| \leqslant \varepsilon$. Утверждения этого пункта будут использованы в § 13 при исследовании точек локального минимума задачи аппроксимации.

Теорема 12.1. *Справедливы соотношения*

$$\gamma_0 = \gamma(B^T B) = \gamma_1, \tag{12.5}$$

где γ_1 — оптимальное значение задачи (12.4);

$$\gamma_0 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} B < n + 1; \tag{12.6}$$

$$\begin{aligned} M = {} & \{(H(u), p(u), x(u)) \colon u_0 \neq 0, \ u \in \Gamma(B^T B)\} = \\ & = \{(H(u), p(u), x(u)) \colon u_0 \neq 0, \ \|u\| = 1, \ \|Bu\|^2 = \gamma_1\}; \end{aligned} \tag{12.7}$$

$$\begin{gathered} (A + H(u))x(u) = b + p(u), \quad \|[-p(u), H(u)]\|^2 = \|Bu\|^2, \\ u_0 \neq 0, \quad \|u\| = 1. \end{gathered} \tag{12.8}$$

Множество точек локального минимума задачи $\mathscr{D}$ совпадает с множеством ее решений.

Доказательство. Пусть $[-p^0,\ H^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$. Преобразуем систему (12.2) к эквивалентному виду:

$$[-p, H]\,u = -[-b, A]\,u,\quad u_0 \neq 0,\quad x = \frac{1}{u_0}[u_1, \ldots, u_n]^T = x(u)$$

или, положив $G = [-p,\ H]$,— к виду $Gu = -Bu$, $u_0 \neq 0$, $x = x(u)$. Тогда при некотором $u = u^0$ имеем $G^0u^0 = -Bu^0$, $u_0^0 \neq 0$, где $G^0 = [-p^0,\ H^0]$. Так как при фиксированном u^0 система $Gu^0 = -Bu^0$ является линейной относительно G, и G^0, очевидно, есть точка локального минимума задачи $\inf\{\|G\|^2\colon\ Gu^0 = -Bu^0\}$, то G^0 является решением этой задачи, и в силу леммы 12.1 имеем $G^0 = G(u^0)$, где

$$G(u) = -\frac{1}{\|u\|^2}Buu^T,\quad \|G(u)\|^2 = \frac{\|Buu^T\|^2}{\|u\|^2} = \frac{\|Bu\|^2}{\|u\|^2} = R(u).$$

Тогда нетрудно видеть, что u^0 — точка локального минимума функции $\|G(u)\|^2 = R(u)$.

Так как матрица B^TB симметрична и положительно полуопределена, то для нее существует ортогональная матрица Q размерности $(n+1)\times(n+1)$ такая, что замена $u = Qv$, $v = [v_1, \ldots, v_{n+1}]^T$ дает

$$R(u) = R(Qv) =$$

$$= \frac{\|BQv\|^2}{\|Qv\|^2} = \frac{v^TQ^TB^TBQv}{v^TQ^TQv} = \frac{s_1v_1^2 + \ldots + s_{n+1}v_{n+1}^2}{v_1^2 + \ldots + v_{n+1}^2},$$

где $Q^TB^TBQ = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & s_{n+1} \end{pmatrix}$, $s_1 \geqslant 0, \ldots, s_{n+1} \geqslant 0$ — собственные значения матрицы B^TB (будем считать, что они выписаны в порядке возрастания). Зафиксировав знаменатель с помощью условия $v_1^2 + \ldots + v_{n+1}^2 = \|Q^{-1}u^0\|^2 \neq \neq 0$ (так как $u^0 \neq 0$ и ортогональная матрица Q^{-1} сохраняет норму), получаем в числителе линейную функцию $\varphi(\lambda) = (s,\ \lambda)$, где $s = [s_1, \ldots, s_{n+1}]$, $\lambda = \left[v_1^2, \ldots, v_{n+1}^2\right]$, заданную на множестве $\Lambda = \left\{\lambda \geqslant 0\colon\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \|Q^{-1}u^0\|^2\right\}$. Множество точек локального минимума $\varphi(\lambda)$ на Λ совпадает с множеством ее точек минимума и равно

$$\{\lambda = [v_1^2, \ldots, v_{n+1}^2]\colon\ v \in \Gamma(Q^T B^T B Q),\ \|v\|^2 = \|Q^{-1}u^0\|^2\} = \\ = \{\lambda = [v_1^2, \ldots, v_{n+1}^2]\colon\ v = Q^{-1}u,\ u \in \Gamma(B^T B), \\ \|Q^{-1}u\|^2 = \|Q^{-1}u^0\|^2\}.$$

Так как u^0 — точка локального минимума $R(u)$, то $\lambda^0 = [\bar v_1^2, \ldots, \bar v_{n+1}^2]^T$, где $\bar v = Q^{-1}u^0$, является точкой локального минимума $\varphi(\lambda)$ на Λ. Следовательно, $u^0 \in \Gamma(B^T B)$, $\|[-p^0, H^0]\|^2 = \|G^0\|^2 = R(u^0) = \dfrac{s_1\|\bar v\|^2}{\|\bar v\|^2} = \gamma(Q^T B^T B Q) = \gamma(B^T B)$. Таким образом, значение функции $\|[-p, H]\|^2$ во всех точках локального минимума задачи $\mathscr{D}$ одинаково и равно $\gamma(B^T B)$.

Так как $R(Qv) = R(Q(\alpha v))$ при $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, то

$$\inf\{R(u)\colon\ u \in \mathbf{R}^{n+1}\} = \inf\{R(Qv)\colon\ \|v\|^2 = \|Q^{-1}u^0\|^2\} = \\ = \inf\left\{(s, \lambda)\colon\ \lambda \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = \|Q^{-1}u^0\|^2\right\} = s_1 = \gamma(B^T B)$$

и достигается на $\Gamma(B^T B)$. Отметим, что справедливость этого утверждения может быть усмотрена и из того, что $R(u)$ представляет собой отношение Рэлея (см., например, [78]). Учитывая предыдущие рассуждения, можно записать

$$\gamma_0 = \inf\{\|G\|^2\colon\ Gu = -Bu,\ u_0 \neq 0\} = \\ = \inf\{\|G(u)\|^2 = R(u)\colon\ u_0 \neq 0\}.$$

Так как функция $R(u)$ определена и непрерывна для всех $u \neq 0$ и $\Gamma(B^T B)$ не содержит нуля, то

$$\gamma_0 = \inf\{R(u)\colon\ u_0 \neq 0\} = \inf\{R(u)\colon\ u \in \mathbf{R}^{n+1}\} = \gamma(B^T B).$$

С другой стороны, из $u^1 \in \Gamma(B^T B)$, $u_0^1 \neq 0$ вытекает $\|[-p(u^1),\ H(u^1)]\|^2 = \|G(u^1)\|^2 = R(u^1) = \gamma(B^T B) = \gamma_0$ и в то же время $G(u^1)u^1 = -Bu^1$, т. е. система (12.2) совместна при $H = H(u^1)$, $p = p(u^1)$, $x = x(u^1)$.

Суммируя сказанное, получаем, что множество точек локального минимума задачи $\mathscr{D}$ совпадает с множеством ее решений и равно $\{[-p(u),\ H(u)]\colon\ u_0 \neq 0,\ u \in \Gamma(B^T B)\}$.

Если $u_0 \neq 0$, $\|u\| = 1$, то $\|[-p(u),\ H(u)]\|^2 = \|G(u)\|^2 = \|Bu\|^2$ и $G(u)u = -Bu$, т. е. система (12.2) совместна при $H = H(u)$, $p = p(u)$, $x = x(u)$. Этим доказано (12.8), а также неравенство $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$. Так как $\|Bu\|^2 = R(u) = \gamma(B^T B)$ при $u \in \Gamma(B^T B)$, $\|u\| = 1$, то из непрерывности $\|Bu\|^2$ следует (12.5). В свою очередь из $u_0 \neq 0$, $\|u\| = 1$, $\|Bu\|^2 = \gamma_1$ вытекает $\gamma(B^T B) = \gamma_1 = \|Bu\|^2 = R(u)$; следовательно, $u \in \Gamma(B^T B)$, что завершает доказательство (12.7). Наконец, справедливость (12.6) следует из того, что $\gamma(B^T B) = s_1 \geqslant 0$ и имеют место эквивалентности

$$\gamma(B^T B) = \gamma_0 = 0 \Leftrightarrow \det B^T B = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} B^T B = \operatorname{rang} B < n + 1$$

(см., например, [78, с. 132]). Теорема доказана.

Пусть теперь некоторые столбцы матрицы A фиксированы и не корректируются. Не ограничивая общности, можно считать, что фиксированы последние $n - l$ столбцов, $0 \leqslant l < n$. Тогда система (12.2), множество K и задача $\mathscr{D}$ принимают соответственно вид

$$[A_l + H_l, A_l'] x = b + p, \tag{12.9}$$

$$K_l = \{[-p, H_l]\colon \text{ система } [A_l + H_l, A_l'] x = b + p \text{ совместна}\},$$

$$\mathscr{D}_l\colon \ \inf \{\|[-p, H_l]\|^2\colon \ [-p, H_l] \in K_l\},$$

где

$$A_l = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}, \quad A_l' = \begin{pmatrix} a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,l+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$H_l = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m1} & \cdots & h_{ml} \end{pmatrix}.$$

(Понятно, что в случае $l = 0$ задача $\mathscr{D}_l$ на самом деле имеет вид (12.3). В дальнейшем оговорки подобного рода делаться не будут.) Так как для любых H_l, x выполняется $[-p, H_l] \in K_l$ при $p = [A_l + H_l, A_l'] x - b$, то $K_l \neq \varnothing$.

Через $\Omega(V)$ обозначим множество матриц, столбцы каждой из которых представляют собой базис L_V — подпространства, натянутого на столбцы матрицы V. Для любого $W \in \Omega(V)$ матрица $P = W(W^T W)^{-1} W^T$ является *матрицей проектирования* на L_V (см., например, [78, с. 139]), т. е.

$$Py \in L_V, \ \|y - Py\| = \min \{\|y - z\|\colon \ z \in L_V\} \quad \forall y,$$

где y, z — векторы соответствующих размерностей. Следовательно, столбцами P являются проекции вектор-столбцов единичной матрицы на L_V. Поэтому P однозначно определяется по V и можно ввести обозначение $P(V)=W(W^TW)^{-1}W^T$, $W\in\Omega(V)$. В качестве W можно, например, взять матрицу, столбцы которой являются максимальной линейно независимой подсистемой столбцов матрицы V. Матрица $E-P$ обладает свойством (см. [78, с. 140])

$$(E-P)^2=E-P=(E-P)^T. \tag{12.10}$$

Положим

$$B=[-b,A_l,A_l'],\quad B_1=[-b,A_l],\quad B_2=A_l',$$
$$u^T=[u_0,u_1,\ldots,u_n]=[\tilde{u}^T,\bar{u}^T],\quad \tilde{u}^T=[u_0,u_1,\ldots,u_l],$$
$$\bar{u}^T=[u_{l+1},\ldots,u_n],\quad U(\tilde{u})=\{u\colon\ B_2\bar{u}=-P(B_2)B_1\tilde{u}\}.$$

Определим $H_l(u)$, $p(u)$, $x(u)$ с помощью соотношений

$$[-p(u),H_l(u)]=-\frac{1}{\|\tilde{u}\|^2}Buu^T,\quad x(u)=\frac{1}{u_0}[u_1,\ldots,u_n]^T.$$

Через M_l обозначим множество всех троек $(H_l,\ p,\ x)$, удовлетворяющих (12.9) и равенству $\|[-p,H_l]\|^2=\gamma_0^l$, где γ_0^l — оптимальное значение задачи $\mathscr{D}_l$. Рассмотрим задачу

$$\inf\{\|(E-P(B_2))B_1\tilde{u}\|^2\colon\ u_0\neq 0,\quad \|\tilde{u}\|=1\}. \tag{12.11}$$

Точка локального минимума задачи $\mathscr{D}_l$ определяется так же, как для задачи $\mathscr{D}$.

Теорема 12.2. *Пусть $0\leqslant l<n$. Справедливы соотношения*

$$\gamma_0^l=\gamma\left(B_1^T(E-P(B_2))B_1\right)=\gamma_1^l, \tag{12.12}$$

где γ_1^l — оптимальное значение задачи (12.11);

$$\begin{aligned}M_l=\{&(H_l(u),p(u),x(u))\colon\ u_0\neq 0,\\ &u\in U(\tilde{u}),\ \tilde{u}\in\Gamma\left(B_1^T(E-P(B_2))B_1\right)\}=\\ &=\{(H_l(u),p(u),x(u))\colon\ u\in U(\tilde{u}),\ u_0\neq 0,\\ &\qquad\|\tilde{u}\|=1,\ \|(E-P(B_2))B_1\tilde{u}\|^2=\gamma_1{}^l\};\end{aligned} \tag{12.13}$$

$$\begin{aligned}&[A_l+H_l(u),A_l']\,x(u)=b+p(u),\\ &\qquad\|[-p(u),H_l(u)]\|^2=\|(E-P(B_2))B_1\tilde{u}\|^2\\ &\qquad\qquad\text{при } u_0\neq 0,\ u\in U(\tilde{u}),\ \|\tilde{u}\|=1.\end{aligned} \tag{12.14}$$

Множество точек локального минимума задачи $\mathscr{D}_l$ совпадает с множеством ее решений.

Доказательство. Пусть $[-p^0, H_l^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathcal{D}_l$. Преобразуем систему (12.9) к эквивалентному виду:

$$[-p, H_l]\,\tilde{u} = -[-b, A_l']\,\tilde{u} - A_l\bar{u},\ u_0 \neq 0,\ x = \frac{1}{u_0}[u_1, \dots u_n]^T$$

или, положив $G = [-p,\ H_l]$,— к виду $G\tilde{u} = -Bu$, $u_0 \neq 0$, $x = x(u)$. Тогда при некотором $u = u^0$ имеем $G^0\tilde{u}^0 = -Bu^0$, $u_0^0 \neq 0$, $x = x(u^0)$, где $G^0 = [-p^0, H_l^0]$. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 12.1, получаем $G^0 = G(u^0)$, где

$$G(u) = -\frac{1}{\|\tilde{u}\|^2}Bu\tilde{u}^T, \quad \|G(u)\|^2 = \frac{\|Bu\|^2}{\|\tilde{u}\|^2}.$$

С учетом сказанного можно записать:

$$\gamma_0^l = \inf\{\|G\|^2\colon G\tilde{u} = -Bu,\ u_0 \neq 0\} =$$
$$= \inf\left\{\|G(u)\|^2 = \frac{\|Bu\|^2}{\|\tilde{u}\|^2} = \frac{\|B_1\tilde{u} + B_2\bar{u}\|^2}{\|\tilde{u}\|^2}\colon\ u_0 \neq 0\right\}. \quad (12.15)$$

Тогда нетрудно видеть, что u^0 является точкой локального минимума функции $\|G(u)\|^2$, и поэтому в силу определения матрицы проектирования должно выполняться $B_2\bar{u}^0 = -P(B_2)B_1\tilde{u}^0$, т. е. $u^0 \in U(\tilde{u}^0)$. Следовательно,

$$\|G(u^0)\|^2 = \frac{\|B_1\tilde{u}^0 - P(B_2)B_1\tilde{u}^0\|^2}{\|\tilde{u}^0\|^2} = R(\tilde{u}^0),$$

где $R(\tilde{u}) = \|(E - P(B_2))B_1\tilde{u}\|^2/\|\tilde{u}\|^2$.

Если $\tilde{u}^1$ близко к $\tilde{u}^0$, то правая часть системы линейных уравнений относительно $\bar{u}$

$$B_2\bar{u} = -P(B_2)B_1\tilde{u}^1 \quad (12.16)$$

близка к $-P(B_2)B_1\tilde{u}^0$. Как известно (см., например, [29]), в этом случае среди решений (12.16) найдется $\bar{u}^1$, близкое к $\bar{u}^0$. Тогда и $G(\bar{u}^1)$ близко к $G(\bar{u}^0)$. Эти соображения показывают, что $\tilde{u}^0$ является точкой локального минимума функции $R(\tilde{u})$.

Рассуждая далее так же, как при доказательстве теоремы 12.1, получаем, что значение функции $\|[-p,\ H]\|^2$ во всех точках локального минимума задачи $\mathcal{D}$ одинаково и равно

$$\gamma\left(B_1^T(E - P(B_2))^T(E - P(B_2))B_1\right) = \gamma\left(B_1^T(E - P(B_2))B_1\right)$$

(в силу (12.10)), $\inf\{R(\tilde{u}): \tilde{u} \in \mathbf{R}^{l+1}\} = \gamma(B_1^T(E-P(B_2))B_1)$, и он достигается на $\Gamma(B_1^T(E-P(B_2))B_1)$. Обозначим $\Gamma_l = \Gamma(B_1^T(E-P(B_2))B_1)$, $B_l = (E-P(B_2))B_1$, $B_l' = B_1^T(E-P(B_2))B_1$.

Продолжая равенства (12.15), имеем

$$\gamma_0^l = \inf\left\{\frac{\|B_1\tilde{u} - P(B_2)B_1\tilde{u}\|^2}{\|\tilde{u}\|^2} = R(\tilde{u}): u_0 \neq 0\right\}.$$

Так как $R(\tilde{u})$ определена и непрерывна для всех $\tilde{u} \neq 0$ и $0 \notin \Gamma_l$, то

$$\gamma_0^l = \inf\{R(\tilde{u}): u_0 \neq 0\} = \inf\{R(\tilde{u}): \tilde{u} \in \mathbf{R}^{l+1}\} = \gamma(B_l').$$

Кроме того, из $u_0 \neq 0$, $u \in U(\tilde{u})$, $\tilde{u} \in \Gamma_l$ вытекает $\|[-p(u), H_l(u)]\|^2 = \|G(u)\|^2 = R(\tilde{u}) = \gamma_0^l$, и в то же время $G(u)\tilde{u} = -Bu$, т. е. система (12.9) совместна при $H_l = H_l(u)$, $p = p(u)$, $x = x(u)$.

В итоге получаем, что множество точек локального минимума задачи $\mathscr{D}_l$ совпадает с множеством ее решений и равно

$$\{[-p(u), H_l(u)]: u_0 \neq 0, u \in U(\tilde{u}), \tilde{u} \in \Gamma_l\}.$$

Если $u_0 \neq 0$, $u \in U(\tilde{u})$, $\|\tilde{u}\| = 1$, то $\|[-p(u), H(u)]\|^2 = \|G(u)\|^2 = \|B_1\tilde{u} + B_2\bar{u}\|^2 = \|B_l\tilde{u}\|^2$, $G(u)\tilde{u} = -Bu$, т. е. система (12.9) совместна при $H_l = H_l(u)$, $p = p(u)$, $x = x(u)$. Этим доказано (12.14) и неравенство $\gamma_1^l \geqslant \gamma_0^l$. Так как $\|B_l\tilde{u}\|^2 = R(\tilde{u}) = \gamma(B_l')$ при $\tilde{u} \in \Gamma_l$, $\|\tilde{u}\| = 1$, то (12.12) следует из непрерывности $\|B_l\tilde{u}\|^2$. С другой стороны, из $u_0 \neq 0$, $\|\tilde{u}\| = 1$, $\|B_l\tilde{u}\|^2 = \gamma_1^l$ вытекает $\gamma(B_l') = \gamma_1^l = \|B_l\tilde{u}\|^2 = R(\tilde{u})$, следовательно, $\tilde{u} \in \Gamma_l$, что завершает доказательство (12.13) и теоремы.

Замечание 12.1. Если вместе с последними $n-l$ $(0 < l \leqslant n)$ столбцами матрицы A фиксирован и столбец b, то соответствующее утверждение формулируется и доказывается аналогично теореме 12.2.

Замечание 12.2. Полученные результаты распространяются на случай, когда фиксирована часть строк и столбцов матрицы $[A, b]$, а норма корректирующей матрицы минимизируется с весами.

12.2. Однопараметрическая аппроксимация. Системе (12.1) поставим в соответствие систему

$$(A + tH)x = b + tp, \tag{12.17}$$

где $H = [h_{ji}]_{m,n}$, $p \in \mathbf{R}^m$ — произвольные фиксированные матрица и вектор, t — скалярный параметр. Нас будет интересовать структура множества $K = \{t\colon$ система (12.17) совместна$\}$. Обозначим $B = [b, -A]$, $G = [-p, H]$, $u = [u_0, u_1, \ldots, u_n]^T$. Пусть матрица B_k составлена из $k+1$ столбцов B, включая первый $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Для удобства будем считать, что $B = [B_k, B_k']$. Тогда $G = [G_k, G_k']$, где G_k — матрица размера $m \times (k+1)$. Положим $e = [1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\theta = [0, \ldots, 0]^T \in \mathbf{R}^{n+1}$, $B_e = [e, -B^T], G_e = [e, -G^T]$, $B_* = [\theta, -B^T], G_* = [\theta, -G^T]$.

Для произвольной матрицы Q с линейно независимыми столбцами через $U(Q)$ обозначим матрицу той же размерности и ранга, обладающую свойством $U^T(Q)Q = E$, причем все столбцы $U(Q)$ принадлежат пространству столбцов Q (подпространство, натянутое на столбцы или строки матрицы для краткости будем называть *пространством* ее *столбцов* или *строк*). В качестве $V(Q)$ возьмем любую матрицу, столбцы которой дополняют столбцы $U(Q)$ до базиса всего пространства, причем $V^T(Q)Q = 0$. Например, можно положить $[U(Q), V(Q)]^T = [Q, Q']^{-1}$, где $[Q, Q']$ — произвольная неособенная матрица, достроенная до квадратной из Q так, что пространство столбцов Q ортогонально пространству столбцов Q'.

Через $Z(W)$ обозначим множество собственных значений квадратной матрицы W. Положим

$$Y(C, D, \alpha) = \{q\colon U^T(C)Dq = \alpha q,\ V^T(C)Dq = 0,\ q_0 \neq 0\},$$

$$Y_1(t) = \{u\colon u_0 \neq 0,\ u = U(B^T)y,\ GU(B^T)y = t^{-1}y\},$$

$$Y_2(t) = \{u\colon u_0 \neq 0,\ u = U(G^T)y,\ BU(G^T)y = ty\},$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}^m$; C, D, q — матрицы и вектор согласованных размерностей, q_0 — первая координата q. Если матрица C — квадратная, то равенство $V^T(C)Dq = 0$ в определении $Y(C, D, \alpha)$ отсутствует.

Теорема 12.3. *Имеют место следующие утверждения.*

1) *Пусть* $0 \leqslant k < n$, $\operatorname{rang} B_k = k+1$. *Тогда*

$$\{t\colon t^{-1} \in Z(U^T(B_k)G_k),\ Y(B_k, G_k, t^{-1}) \neq \varnothing\} \subset K.$$

2) *Пусть* $0 \leqslant k < n$, $\operatorname{rang} G_k = k+1$. *Тогда*

$$\{t \in Z(U^T(G_k)B_k)\colon\ Y(G_k, B_k, t) \neq \varnothing\} \subset K.$$

3) *Пусть* $\operatorname{rang} B = n+1$. *Тогда*

$$K = \{t:\ t^{-1} \in Z(U^T(B)G),\ Y(B,\ G,\ t^{-1}) \neq \varnothing\}.$$

4) *Пусть* $\operatorname{rang} G = n+1$. *Тогда*

$$K = \{t \in Z(U^T(G)B):\ Y(G,\ B,\ t) \neq \varnothing\}.$$

5) *Пусть* $\operatorname{rang} B = m$ *и каждая строка* G *принадлежит пространству строк* B. *Если система* (12.1) *совместна, то* $K = \mathbf{R}^1$. *В противном случае*

$$K = \{t:\ t^{-1} \in Z(GU(B^T)),\ Y_1(t) \neq \varnothing\}.$$

6) *Пусть* $\operatorname{rang} G = m$ *и каждая строка* B *принадлежит пространству строк* G. *Если система* $Hx = p$ *совместна, то* $K = \mathbf{R}^1$. *В противном случае*

$$K = \{t \in Z(BU(G^T)):\ Y_2(t) \neq \varnothing\}.$$

7) *Пусть* $\operatorname{rang} B = m$, *и система* (12.1) *совместна. Тогда*

$$K = \mathbf{R}^1 \backslash \{t:\ t^{-1} \in Z\left(U^T(B_e)\,G_*\right), Y\left(B_e, G_*, t^{-1}\right) \neq \varnothing\}.$$

8) *Пусть* $\operatorname{rang} G = m$, *и система* $Hx = p$ *совместна. Тогда*

$$K \backslash \{0\} =$$
$$= \mathbf{R}^1 \backslash \left(\{t \in Z\left(U^T(G_e)\,B_*\right):\ Y(G_e, B_*, t) \neq \varnothing\} \cup \{0\}\right).$$

Доказательство. Начнем с 2). Легко видеть, что система (12.17) совместна при тех же значениях t, при которых совместна система

$$tGu = Bu, \qquad u_0 = 0. \tag{12.18}$$

Так как матрица $[U(G_k),\ V(G_k)]^T$ — неособенная, то совместность (12.18) в свою очередь эквивалентна совместности системы

$$\begin{aligned} tU^T(G_k)Gu &= U^T(G_k)Bu, \\ tV^T(G_k)Gu &= V^T(G_k)Bu, \qquad u_0 \neq 0. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Используя разложение $Gu = G_k v + G_k' w$, $Bu = B_k v + B_k' w$, где $u^T = \left[v^T, w^T\right]$, $v = [u_0, u_1, \ldots, u_k]^T$, $w = [u_{k+1}, \ldots, u_n]^T$, и определения $U(G_k)$, $V(G_k)$, преобразуем (12.19) к виду

$$\begin{aligned} tv + tU^T(G_k)\,G_k' w &= U^T(G_k)\,B_k v + U^T(G_k)\,B_k' w, \\ tV^T(G_k)\,G_k' w &= V^T(G_k)\,B_k v + V^T(G_k)\,B_k' w, u_0 \neq 0. \end{aligned} \tag{12.20}$$

(Понятно, что в случае, когда матрица G_k — квадратная, в соотношениях (12.19) и (12.20) равенства, содержащие $V^T(G_k)$, отсутствуют.) Тогда из $Y(G_k, B_k, t) \neq \varnothing$ вытекает совместность (12.20) при $w = 0$, причем из $u_0 \neq 0$ следует $v \neq 0$, и поэтому t является собственным значением матрицы $U^T(G_k)B_k$. Так как системы (12.20) и (12.17) совместны при одних и тех же значениях t, то 2) доказано.

Так как в случае $k = n$ в системе (12.20) члены, содержащие w, отсутствуют, то 4) следует из доказательства 2) и эквивалентности систем (12.17) и (12.20) (т. е. совместности при одних и тех же значениях t).

Для ненулевых значений t система (12.17) может быть представлена в виде $(H + t^{-1}A)x = p + t^{-1}b$ или

$$(-H - t^{-1}A)x = -p - t^{-1}b, \qquad (12.21)$$

где роль A, b, H, p, t, B, G выполняют соответственно $-H$, $-p$, $-A$, $-b$, t^{-1}, $[-p, H] = G$, $[b, -A] = B$. Применяя 2) к (12.21), получаем 1).

В 3) из линейной независимости столбцов B следует несовместность (12.1) и поэтому заведомо $0 \notin K$. Это позволяет перейти к системе (12.21). Тогда, применяя 4) к (12.21), получаем 3).

Перейдем к 6). Так как матрица $[U(G^T), V(G^T)]$ (предположим пока, что $m \neq n + 1$, т. е. G — не квадратная) — неособенная, то совместность (12.17) эквивалентна совместности системы $tGu = Bu$, $u = U(G^T)y + V(G^T)z$, $u_0 \neq 0$ ($y \in \mathbf{R}^m$, $z \in \mathbf{R}^{n+1-m}$), которая с учетом сделанных предположений и определений $U(G^T)$ и $V(G^T)$ преобразуется к виду

$$ty = BU(G^T)y, \quad u = U(G^T)y + V(G^T)z, \; u_0 \neq 0. \qquad (12.22)$$

Значение $y = 0$ не удовлетворяет (12.22) тогда и только тогда, когда первая строка матрицы $V(G^T)$ — нулевая. Учитывая определение $V(G^T)$, нетрудно видеть, что последнее имеет место только в случае, когда $-e$ принадлежит пространству столбцов G^T, т. е. когда совместна система $-e = G^T\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}^m$) или $1 = p^T\lambda$, $0 = H^T\lambda$. Как известно (см., например, [78, с. 108]), совместность данной системы эквивалентна несовместности системы

$$Hx = p. \qquad (12.23)$$

Таким образом, несовместность (12.23) влечет $y \neq 0$; следовательно, t — собственное значение $BU(G^T)$. При этом, так как первая строка $V(G^T)$ — нулевая, то система

(12.22) совместна при некотором $t \in Z(BU(G^T))$ тогда и только тогда, когда $Y_2(t) \neq \varnothing$. Если же (12.23) совместна, то первая строка $V(G^T)$ — ненулевая и любое $t \in \mathbf{R}$ удовлетворяет (12.22) при $y = 0$ и подходящем z. Так как (12.17) и (12.22) совместны при одних и тех же значениях t, то 6) доказано для $m \neq n + 1$.

Ясно, что в случае $m = n + 1$ (т. е. G — квадратная) слагаемое $V(G^T)z$ в (12.22) отсутствует, система (12.23) несовместна и 6) следует из эквивалентности систем (12.22) и (12.17). Применяя 6) к системе (12.21), получаем 5).

Докажем 7). Как уже отмечалось выше, система (12.17) несовместна тогда и только тогда, когда совместна система $(b^T + tp^T)\lambda = 1$, $(A^T + tH^T)\lambda = 0$ $(\lambda \in \mathbf{R}^m)$ или

$$(B^T - tG^T)\lambda = e. \qquad (12.24)$$

По предположению столбцы B^T линейно независимы. Совместность (12.1) означает несовместность системы $B^T\lambda = e$. Таким образом, столбцы матрицы B_e линейно независимы. Этим самым для системы (12.24) выполнены условия пункта 3) (где роль B и G выполняют B_e и G_* соответственно). Тогда 7) следует из 3).

Для ненулевых значений t система (12.17) преобразуется к виду (12.21). Применяя теперь 7) к (12.21), получаем 8).

З а м е ч а н и е 12.3. Доказанные утверждения распространяются на случай произвольных A, b, H, p. Можно также показать, что для K, соответствующего системе $A(t)x = b(t)$, где все коэффициенты $A(t)$, $b(t)$ — рациональные функции от t, справедлива альтернатива: либо K содержит не более, чем конечное число точек, либо K содержит все $t \in \mathbf{R}^1$ за исключением не более, чем конечного числа точек.

§ 13. Симметрическая аппроксимация несобственных задач линейного программирования

Паре взаимно двойственных задач линейного программирования L и L^*, т. е.

$$\max\{(c, x)\colon\ Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\},$$
$$\min\{(b, u)\colon\ A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\},$$

поставим в соответствие задачи

$$L(h, p, q)\colon\ \max\{(c + q, x)\colon\ (A + H)x \leqslant b + p,\ x \geqslant 0\},$$

$$L^*(h,\ p,\ q)\colon\ \min\{(b+p,\ u)\colon\ (A+H)^T u \geqslant c+q,\ u \geqslant 0\},$$

где $q \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^m$ — векторные параметры, $H = [h_{ji}]_{m,n}$ — параметрическая матрица.

Задачу об аппроксимации задачи L (в предположении ее несобственности) будем рассматривать в виде

$$\mathscr{D}\colon\ \inf\{\|[h,\ p,\ q]\|^2\colon \text{ задача } L(h,\ p,\ q) \text{ — собственная}\},$$

где $[h,\ p,\ q] = [h_{11}, \ldots, h_{mn},\ p_1, \ldots, p_m,\ q_1, \ldots, q_n] \in \mathbf{R}^{mn+m+n}$. Так как согласно теореме двойственности $L(h,\ p,\ q)$ является собственной тогда и только тогда, когда собственной является двойственная к ней задача $L^*(h,\ p,\ q)$, то $\mathscr{D}$ совпадает с задачей об аппроксимации L^*:

$$\mathscr{D}^*\colon\ \inf\{\|[h,\ p,\ q]\|^2\colon \text{ задача } L^*(h,\ p,\ q) \text{ — собственная}\}.$$

Допустимое множество задач $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^*$ обозначим через K, т. е. $K = \{[h,\ p,\ q]\colon$ задача $L(h,\ p,\ q)$ — собственная$\}$. Заметим, что множество K не обладает свойствами выпуклости и замкнутости (см., например, [99, с. 26, 27]).

13.1. Классификация матриц ограничений и условия разрешимости. Пусть $a_i, h_i, a_j^T, h_j^T, e_j', e_i^T$ $(i \in \mathbf{N}_n,\ j \in \mathbf{N}_m)$ — вектор-столбцы матриц A, H, A^T, H^T, $E_{m,m}$, $E_{n,n}$ соответственно. Пара систем линейных неравенств

$$(A+H)x \leqslant 0, \qquad -x \leqslant 0, \tag{13.1}$$

$$-(A+H)^T u \leqslant 0, \qquad -u \leqslant 0 \tag*{(13.1)*}$$

является двойственной в смысле [79]. Поставим ей в соответствие системы

$$(A+H)x < 0, \qquad -x < 0, \tag{13.2}$$

$$-(A+H)^T u < 0, \qquad -u < 0. \tag*{(13.2)*}$$

Через T_i $\left(T_i^*\right)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ обозначим множество всех $h \in \mathbf{R}^{mn}$, для которых имеет место соответственно один из случаев:

1) система (13.1) (система (13.1)*) имеет единственное решение;

2) система (13.2) (система (13.2)*) совместна;

3) система (13.1) (система (13.1)*) имеет ненулевое решение, система (13.2) (система (13.2)*) несовместна.

Отметим, что $h \in T_1$ $\left(h \in T_1^*\right)$ тогда и только тогда, когда система векторов $\{a_j + h_j,\ -e_i\colon\ j \in \mathbf{N}_m,\ i \in \mathbf{N}_n\}$ $\left(\{a_i + h_i,\ e_j'\colon\ i \in \mathbf{N}_n, j \in \mathbf{N}_m\}\right)$ является всесторонней. Система векторов $\{d_1,\ \ldots,\ d_l\} \subset \mathbf{R}^k$ называется *всесторонней*, если для каждого $g \in \mathbf{R}^k$, $g \neq 0$ найдется индекс $t \in \mathbf{N}_l$ такой, что $(d_t, g) < 0$ ([36, с. 31]). Эквивалентным определением всесторонности может служить соотношение $\operatorname{cone}\{d_1, \ldots, d_l\} = \mathbf{R}^k$.

Лемма 13.1. *Справедливы соотношения и утверждения:*

1) $T_1 = T_2^* \neq \varnothing$, $T_2 = T^* \neq \varnothing$, $T_3 = T_3^* \neq \varnothing$.

2) $\mathbf{R}^{mn} = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, $T_i \cap T_j = \varnothing$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3)$.

3) T_1 *и* T_2 — *открытые множества,* T_3 — *замкнутое.*

4) *Для любых* $h^0 \in T_3$, $\varepsilon > 0$ *найдутся* $h^1 \in T_1$, $h^2 \in T_2$ *такие, что* $\|h^0 - h^1\| \leqslant \varepsilon$, $\|h^0 - h^2\| \leqslant \varepsilon$.

5) *Замыкание множества* $T_1 \cup T_2$ *есть* $\mathbf{R}^{mn}$.

6) *Отрезок, соединяющий* $h^1 \in T_1$ *и* $h^2 \in T_2$, *содержит* $h^3 \in T_3$.

Таким образом, T_3 выполняет роль границы, разделяющей множества T_1 и T_2.

Доказательство. 1) Равенства $T_1 = T_2^*, T_2 = T_1^*$, $T_3 = T^*$ могут быть непосредственно получены из определений с помощью следствия 3А работы [79]. В непустоте множеств T_i $(i = 1, 2, 3)$ легко убедиться.

2) Утверждение вытекает из определений множеств T_i $(i = 1, 2, 3)$.

3) Так как системы (13.2) и (13.2)*, очевидно, остаются совместными при малых вариациях H, то T_2 и $T_2^* = T_1$ являются множествами открытыми. Множество T_3 замкнуто как дополнение открытого множества $T_1 \cup T_2$ до $\mathbf{R}^{mn}$.

4) Не ограничивая общности, можно считать $h^0 = 0$, $\varepsilon < 1$. Так как $0 \in T_3$, то $Ax \leqslant 0$ при некотором $x \geqslant 0$, $\|x\| = 1$. Пусть

$$h_j^2 = -\frac{\varepsilon}{m^{1/2}} x^T \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \quad x^1 = x + \frac{\varepsilon}{2m^{1/2}(1+r)} x^2,$$

$$x^2 > 0, \quad \|x^2\| = 1, \quad r = \max\{\|a_j\|:\ j \in \mathbf{N}_m\}.$$

Тогда непосредственной подстановкой проверяются соотношения $(x^1, a_j + h_j^2) < 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, x^1 > 0, \|h^2\| = \varepsilon$, т. е. $h^2 \in T_2$. Доказательство существования $h^1 \in T_1 = T_2^*$, $\|h^1\| = \varepsilon$ проводится аналогично, но уже для двойственной системы $A^T u \geqslant 0$, $u \geqslant 0$.

5) Утверждение является следствием 2) и 4).

6) Пусть $h' \in T_1, h'' \in T_2$, Q — отрезок, соединяющий h' и h'', $h^k \in T_2 \cap Q$ $\forall k$, $\lim\limits_{k\to\infty} h^k = h'''$, $\|h'''\| = \inf\limits_{h \in T_2 \cap Q} \|h - h'\|$. Так как каждая окрестность h''' содержит точки из T_1 и T_2, то $h''' \notin T_1$, $h''' \notin T_2$ в силу 3). Таким образом, $h''' \in Q \cap T_3$.

Лемма 13.2. *Задача $L(h, p, q)$ является собственной тогда и только тогда, когда*

$$p \in K_b(h) = -b + \operatorname{cone}\{a_i + h_i, e_j': i \in \mathbf{N}_n, j \in \mathbf{N}_m\},$$
$$q \in K_c(h) = -c + \operatorname{cone}\{a_j^T + h_j^T, -e_i^T: j \in \mathbf{N}_m, i \in \mathbf{N}_n\}.$$

Доказательство. Разрешимость задач $L(h, p, q)$ и $L^*(h, p, q)$ эквивалентна одновременной совместности их систем ограничений:

$$(A+H)x \leqslant b+p, \quad x \geqslant 0, \quad (A+H)^T u \geqslant c+q, \quad u \geqslant 0,$$

или, что то же самое,

$$p = -b + \sum_{i=1}^{n} x_i(a_i + h_i) + p', \quad x \geqslant 0, \quad p' \geqslant 0,$$
$$q = -c + \sum_{j=1}^{m} u_j(a_j^T + h_j^T) - q', \quad u \geqslant 0, \quad q' \geqslant 0.$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Итак, $K = \{[h, p, q]: h \in \mathbf{R}^{mn}, p \in K_b(h), q \in K_c(h)\}$. Так как в силу всесторонности соответствующих систем векторов имеют место эквивалентности

$$K_c(h) = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow h \in T_1; \quad K_b(h) = \mathbf{R}^m \Leftrightarrow h \in T_1^* = T_2, \tag{13.3}$$

то из лемм 13.1 и 13.2 вытекает

Следствие 13.1. *Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $L(h, p, q)$ в случаях $h \in T_i$ ($i = 1, 2, 3$) имеют соответственно вид*:

1) $p \in K_b(h)$ $(\neq \mathbf{R}^m)$;
2) $q \in K_c(h)$ $(\neq \mathbf{R}^n)$;
3) $p \in K_b(h)$ $(\neq \mathbf{R}^m)$, $q \in K_c(h)$ $(\neq \mathbf{R}^n)$.

Следствие 13.2. *Пусть задача $L(h, p, q)$ — несобственная. Тогда*:

1) *Если $h \in T_1$, то $L(h, p, q)$ — несобственная задача 1-го рода, $L^*(h, p, q)$ — несобственная задача 2-го рода.*

2) *Если $h \in T_2$, то $L(h, p, q)$ — несобственная задача 2-го рода, $L^*(h, p, q)$ — несобственная задача 1-го рода.*

3) *Если* $h \in T_3$, *то* $L(h, p, q)$ — *несобственная задача 1-го, 2-го или 3-го рода,* $L^*(h, p, q)$ — *несобственная задача соответственно 2-го, 1-го или 3-го рода.*

Для каждого $h \in \mathbf{R}^{mn}$ множества $K_b(h)$ и $K_c(h)$ являются непустыми выпуклыми замкнутыми конусами. Этим обеспечены существование и единственность точек $p(h) \in K_b(h)$ и $q(h) \in K_c(h)$, являющихся проекциями нуля соответственно на $K_b(h)$ и $K_c(h)$ или, что то же самое (см. доказательство леммы 13.2), решениями задач

$$\min\{\|p\|^2\colon M(h, p) \neq \varnothing\},$$
$$\min\{\|q\|^2\colon M^*(h, q) \neq \varnothing\},$$

где $M(h, p)$ и $M^*(h, q)$ — допустимые множества задач $L(h, p, q)$ и $L^*(h, p, q)$.

На $\mathbf{R}^{mn}$ определим функцию $F(h) = \|[h, p(h), q(h)]\|^2 = \|h\|^2 + \|p(h)\|^2 + \|q(h)\|^2$, которая в силу (13.3) может быть представлена в виде

$$F(h) = \begin{cases} \|h\|^2 + \|p(h)\|^2, & h \in T_1, \\ \|h\|^2 + \|q(h)\|^2, & h \in T_2, \\ \|h\|^2 + \|p(h)\|^2 + \|q(h)\|^2, & h \in T_3. \end{cases}$$

13.2. Свойства функции $F(h)$. Докажем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для дальнейшего.

1. *$F(h)$ полунепрерывна сверху на* $\mathbf{R}^{mn}$.

Действительно, для каждого $h^0 \in \mathbf{R}^{mn}$ при некоторых $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m}]^T \geqslant 0$, $\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_{n+m}]^T \geqslant 0$ имеет место представление $p(h^0) = -b + [A + H^0, E_{m,m}]\lambda$, $q(h^0) = -c + [(A + H^0)^T, -E_{n,n}]\mu$. Пусть $h^k \to h^0$ $(k \to \infty)$; тогда для $p^k = p(\lambda, h^k)$, $q^k = q(\mu, h^k)$, где

$$\begin{aligned} p(\lambda, h) &= -b + [A + H, E_{m,m}]\lambda \in K_b(h), \\ q(\mu, h) &= -c + [A^T + H^T, -E_{n,n}]\mu \in K_c(h), \end{aligned} \tag{13.4}$$

выполняется $F(h^k) \leqslant \|h^k\|^2 + \|p^k\|^2 + \|q^k\|^2 \to F(h^0)$ $(k \to \infty)$, что и требовалось.

Далее, для $h \in T_1$ преобразуем вид функции $F(h)$:

$$F(h) = \|p(h)\|^2 + \|h\|^2 = \min\{\|p\|^2 + \|h\|^2\colon p \in K_b(h)\} =$$
$$= \min\{\|-b + [A + H, E_{m,m}]\lambda\|^2 + \|h\|^2\colon \lambda \in \mathbf{R}_+^{n+m}\}.$$

Отсюда получаем

$$F(h) = \min\{f(\lambda, h) = \|b\|^2 + 2d^T\lambda + \lambda^T D\lambda + \|h\|^2\colon \lambda \geqslant 0\},$$

$$D=[A+H,\ E_{m,m}]^T[A+H,\ E_{m,m}],\quad d=-b^T[A+H,\ E_{m,m}].$$

Очевидно, матрица D симметрична и положительно полуопределена. Таким образом, $F(h)$ есть оптимальная функция задачи выпуклого квадратичного программирования, целевая функция $f(\lambda,\ h)$ которой зависит от векторного параметра h. Обозначим эту задачу через $\mathscr{D}(h)$, а множество ее решений — через $M(h)$.

Лемма 13.3. *Для каждого $h^0\in T_1$ справедливы утверждения:*

1) *Множество $M(h^0)$ непусто и ограничено;*

2) $M(h^0, p(h^0))=\{x\colon\ x_i=\lambda_i\quad \forall i\in \mathbf{N}_n,\ \lambda\in M(h^0)\}$.

3) *Задача $\mathscr{D}(h)$ β-корректна* [36] *по h в точке h^0.*

4) *Из $h^k\to h^0$ $(k\to\infty)$ следует*

$$\sup_{\lambda\in M(h^k)}\ \inf_{\mu\in M(h^0)}\|\lambda-\mu\|\to 0,\qquad k\to\infty.$$

Доказательство. Заметим, что $M(h^0)$ и $M(h^0,$ $p(h^0))$ представляют собой множества решений систем

$$[A+H^0,\ E_{m,m}]\lambda=b+p(h^0),\qquad \lambda\geqslant 0,\qquad (13.5)$$
$$(A+H^0)x\leqslant b+p(h^0),\qquad x\geqslant 0$$

(это доказывает 2)). Поэтому из $p(h^0)\in K_b(h^0)$ вытекает непустота $M(h^0)$. Соотношение $h^0\in T_1$ эквивалентно всесторонности соответствующей системы векторов, которая, как следует из [36, с. 31], в свою очередь эквивалентна ограниченности $M(h^0,\ p(h^0))$, что влечет ограниченность $M(h^0)$.

Утверждение 3) следует из теоремы 26.2 [36]. Утверждение 4) вытекает из 3).

Следствие 13.3. *Отображение $p(h)$ непрерывно на T_1.*

Отсюда вытекает свойство:

2. *Функция $F(h)$ непрерывна на T_1.*

Лемма 13.3 и рассматриваемые ниже свойства 4, 5 формулируются и доказываются в предположении $h^0\in T_1$. Так как случаю $h\in T_2$ для задачи $L(h,\ p,\ q)$ соответствует случай $h\in T_1^*$ для $L^*(h,\ p,\ q)$, полностью симметричный случаю $h\in T_1$ для $L(h,\ p,\ q)$, то эти результаты автоматически переносятся путем переформулировки в терминах задачи $L^*(h,\ p,\ q)$, переписанной для удобства в форме $L(h,\ p,\ q)$, т. е. в виде

$$-\max\{(-b-p,\ u)\colon\ (-A^T-H^T)u\leqslant -c-q,\ u\geqslant 0\},\qquad (13.6)$$

на случай $h \in T_2$. В частности, из 2 получаем свойство:

3. *Функция $F(h)$ непрерывна на T_2.*

4. *Для любых $h^0 \in T_1$, $s \in \mathbf{R}^{mn}$ существует и конечна $F'_s(h^0)$ — производная функции $F(h)$ в точке h^0 по направлению s. Справедлива формула*

$$F'_s(h^0) = \min\left\{2\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\, p(h^0) + h_i^0, s^i\right):\ \lambda \in M(h^0)\right\}, \qquad (13.7)$$

где $s^i = [s_1^i, \ldots, s_m^i]$, $s = [s_1^1, \ldots, s_m^1, s_1^2, \ldots, s_m^n]$.

Доказательство. Пусть $f'(\lambda, h^0)$ — градиент по h функции $f(\lambda, h)$ в точке h^0; $M^\varepsilon(h^0)$ — метрическое ε-расширение множества $M(h^0)$. Функция $f(\lambda, h)$ дифференцируема по h для каждого $\lambda \in \mathbf{R}^{n+m}$, т. е.

$$f(\lambda, h) - f(\lambda, h^0) = (f'(\lambda, h^0), h - h^0) + r(\lambda, h),$$

$$r(\lambda, h)\|h - h^0\|^{-1} \to 0 \text{ при } h \to h^0 \ \forall \lambda \in M^\varepsilon(h^0).$$

Так как $f(\lambda, h)$ при фиксированном λ является квадратичной функцией от h, то $r(\lambda, h) = (S(h - h^0), h - h^0)$, где коэффициенты матрицы S зависят только от λ. Тогда из ограниченности $M^\varepsilon(h^0)$ получаем, что $r(\lambda, h)\|h - h^0\|^{-1} \to 0$ при $h \to h^0$ равномерно по $\lambda \in M^\varepsilon(h^0)$. Тогда существование $F'_s(h^0)$ и формула (13.7) вытекают из следствия 28.3 [36].

5. *Пусть задача L — несобственная, $h^0 \in T_1$ — точка локального минимума функции $F(h)$. Тогда $M(h^0) = \{\lambda^0\}$ и выполняются соотношения*

$$F'_s(h^0) = 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}^{mn}, \quad \lambda_i^0 p(h^0) + h_i^0 = 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n.$$

Доказательство. Из представления (13.5) вытекает, что $M(h^0) = \{\lambda^0\}$, если точкой является проекция $M(h^0)$ на каждую из n первых координатных осей пространства $\mathbf{R}^{n+m}$. Пусть это не выполняется; тогда при некоторых $0 \leqslant \alpha < \beta$, $i \in \mathbf{N}_n$ для каждого λ'_i из отрезка $[\alpha, \beta]$ найдутся $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{i-1}, \lambda'_{i+1}, \ldots, \lambda'_{n+m}$ такие, что $\lambda' = [\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n+m}] \in M(h^0)$.

Так как h^0 — точка локального минимума, то

$$F'_s(h^0) \geqslant 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}^{mn}. \qquad (13.8)$$

Если $p(h^0) = 0$, то из (13.7) и (13.8) вытекает $h^0 = 0$. Это означает, что задача L — собственная, что противоречит условию. Поэтому $p_j(h^0) \neq 0$ при некотором $j \in \mathbf{N}_m$. Тогда при

$$\tilde{s} = -\bar{s}, \quad \bar{s} = [s^1, \ldots, s^n] \in \mathbf{R}^{mn},$$
$$s^k = \begin{cases} 0, & k \in \mathbf{N}_n, \quad k \neq i, \\ (e_j')^T, & k = i \end{cases}$$

имеем

$$F'_{\tilde{s}}(h^0) = \min \{-\lambda_i p_j(h^0) - h_{ji}^0 \colon \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta\},$$
$$F'_{\bar{s}}(h^0) = \min \{\lambda_i p_j(h^0) + h_{ji}^0 \colon \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta\}.$$

По крайней мере одна из этих двух производных меньше нуля, что противоречит (13.8). Поэтому $M(h^0) = \{\lambda^0\}$. Тогда из (13.7) следует, что (13.8) может выполняться только в случае $F'_s(h^0) = 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}^{mn}$, т. е.

$$\lambda_i^0 p(h^0) + h_i^0 = 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n.$$

6. *Пусть* $h^0 \in T_3$. *Тогда следующие три утверждения эквивалентны:*

1) $F(h)$ *непрерывна в* h^0.

2) $F(h)$ *дифференцируема в* h^0.

3) *Задача* $L(h^0, 0, 0)$ — *собственная.*

Если $F(h)$ *дифференцируема в* $h^0 \in T_3$, *то* $\nabla F(h^0) = 2h^0$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 3). Если, например, $p(h^0) \neq 0$, то согласно лемме 13.1 для каждого ε_k, где $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$, $\varepsilon_k > 0 \quad \forall k$, выполняется $\|h^k - h^0\| < \varepsilon_k$ при некотором $h^k \in T_2$, что в силу (13.3) влечет $p(h^k) = 0$. Отсюда получаем

$$\lim_{k \to \infty} F(h^k) \leqslant \lim_{k \to \infty} (\|h^k\|^2 + \|q(\mu, h^k)\|^2) = \|h^0\|^2 + \\ + \|q(h^0)\|^2 < \|h^0\|^2 + \|p(h^0)\|^2 + \|q(h^0)\|^2 = F(h^0),$$

где $q(\mu, h)$ взято из (13.4). Следовательно, $F(h)$ терпит разрыв в h^0. Аналогично рассматривается случай $q(h^0) \neq 0$.

Теперь для завершения доказательства достаточно показать, что из 3) следует 2). Так как $p(h^0) = 0$, $q(h^0) = 0$, то

$$F(h^0 + \Delta h) \leqslant \\ \leqslant \|h^0 + \Delta h\|^2 + \|p(\lambda, h^0 + \Delta h)\|^2 + \|q(\mu, h^0 + \Delta h)\|^2 = \\ = \varphi(h^0 + \Delta h) = \varphi(h^0) + (\nabla\varphi(h^0), \Delta h) + r(\Delta h) = \\ = F(h^0) + 2(h^0, \Delta h) + r(\Delta h), \quad (13.9)$$

где $p(\lambda, h^0+\Delta h)$, $q(\mu, h^0+\Delta h)$ взяты из (13.4), $r(\Delta h)\|\Delta h\|^{-1}\to 0$ при $\Delta h\to 0$. С другой стороны,

$$F(h^0+\Delta h)\geqslant \|h^0+\Delta h\|^2=F(h^0)+2(h^0, \Delta h)+\|\Delta h\|^2. \tag{13.10}$$

Сопоставляя (13.9) и (13.10), получаем 2) и равенство $\nabla F(h^0)=2h^0$.

13.3. Точки локального минимума задачи $\mathcal{D}$. Точку $[h^0, p^0, q^0]\in K$ будем называть точкой *локального минимума* задачи $\mathcal{D}$, если при некотором $\varepsilon>0$ выполняется $\|[h^0, p^0, q^0]\|^2\leqslant\|[h, p, q]\|^2$ для всех $[h, p, q]\in K$ таких, что $\|[h-h^0, p-p^0, q-q^0]\|<\varepsilon$. Обозначим

$$K_1(h)=K_b(h)+b,$$

$$K_1^0(h)=\{u\in\mathbf{R}^m\colon\ (u,v)\geqslant 0\quad \forall v\in K_1(h)\}.$$

Лемма 13.4. *Для того чтобы $p=p(h)$, где $h\in\mathbf{R}^{mn}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$p\in K_1^0(h),\quad p+b\in K_1(h),\quad (p, p+b)=0. \tag{13.11}$$

Доказательство. Необходимые и достаточные условия оптимальности (см., например, [2]) для задачи выпуклого квадратичного программирования $\mathcal{D}(h)$ можно записать в виде $\lambda\geqslant 0$, $D\lambda+d\geqslant 0$, $\lambda^TD\lambda+d^T\lambda=0$ или

$$p^T[A+H, E]=D\lambda+d\geqslant 0,\quad p^T(p+b)=\lambda^TD\lambda+d^T\lambda=0,$$
$$p=-b+[A+H, E]\lambda,\qquad \lambda\geqslant 0.$$

Так как последняя строка эквивалентна условию $p+b\in K_1(h)$, то лемма доказана.

Учитывая, что $p(h)=-b+[A+H, E]\lambda$ $\forall\lambda\in M(h)$, получаем

Следствие 13.4. *Пусть $h\in\mathbf{R}^{mn}$, $\lambda\in M(h)$, $i\in\mathrm{N}_n$, $j\in\mathrm{N}_m$. Тогда имеют место импликации*:

1) $(p(h), a_i+h_i)>0\Rightarrow\lambda_i=0$;

2) $p_j(h)=(p(h), e_j')>0\Rightarrow\lambda_{n+j}=0$.

Лемма 13.5. *Пусть $[h^0, p^0, q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathcal{D}$, $h^0\in T_3$. Тогда $[h^0, p^0, q^0]=[0, 0, 0]$.*

Доказательство. Ясно, что для $[h^0, p^0, q^0]$ — точки локального минимума задачи $\mathcal{D}$ — выполняется равенство $[h^0, p^0, q^0]=[h^0, p(h^0), q(h^0)]$. Пусть $p^0\neq 0$. В силу леммы 13.1 существует последовательность $\{h^k\}\subset T_2$ такая, что $h^k\to h^0$ при $k\to\infty$.

Положим

$$q^k = q(\mu, h^k), \quad \varepsilon_k = \left| \|h^k\|^2 - \|h^0\|^2 + \|q^k\|^2 - \|q^0\|^2 \right| \quad \forall k,$$

где $q(\mu, h^k)$ взято из (13.4). Так как $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то для каждого k, начиная с некоторого k_0, найдется вектор p^k, удовлетворяющий условиям $p^k = \theta_k p^0$, $0 < \theta_k < 1$, $\|p^0\|^2 - \|p^k\|^2 = \varepsilon_k + 1/k$, причем $p^k \in K_b(h^k) = \mathbf{R}^m$, так как $h^k \in T_2$. Тогда

$$[h^k, p^k, q^k] \in K,$$

$$\|[h^k, p^k, q^k]\|^2 - \|[h^0, p^0, q^0]\|^2 =$$
$$= \|h^k\|^2 - \|h^0\|^2 + \|q^k\|^2 - \|q^0\|^2 + \|p^k\|^2 - \|p^0\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_k - \varepsilon_k - \frac{1}{k} < 0 \quad \forall k \geqslant k_0$$

и $[h^k, p^k, q^k] \to [h^0, p^0, q^0]$ при $k \to \infty$, что противоречит тому, что $[h^0, p^0, q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$. Таким образом, $p^0 = 0$. Аналогично $q^0 = 0$.

Если же $p^0 = 0$, $q^0 = 0$, $h^0 \neq 0$, то в соответствии с (13.9)

$$\|h^0 + \Delta h\|^2 + \|p(\lambda, h^0 + \Delta h)\|^2 + \|q(\mu, h^0 + \Delta h)\|^2 =$$
$$= F(h^0) + 2(h^0, \Delta h) + r(\Delta h) < F(h^0) = \|[h^0, p^0, q^0]\|^2$$

при подходящем сколь угодно малом Δh. Так как

$$p(\lambda, h^0 + \Delta h) \to p(h^0) = p^0, \quad q(\mu, h^0 + \Delta h) \to q(h^0) = q^0$$

при $\Delta h \to 0$, то и в этом случае $[h^0, p^0, q^0]$ не может быть точкой локального минимума задачи $\mathscr{D}$.

Следствие 13.5. *Точка $[h^0, p^0, q^0]$ тогда и только тогда является точкой локального минимума задачи $\mathscr{D}$, когда $p^0 = p(h^0)$, $q^0 = q(h^0)$, h^0 — точка локального минимума $F(h)$. При этом справедливо соотношение эквивалентности*

$$h^0 \in T_3 \Leftrightarrow [h^0, p^0, q^0] = [0, 0, 0] \in K. \tag{13.12}$$

Доказательство. Пусть $h^0 \in T_3$ — точка локального минимума $F(h)$. Тогда из свойства 1 следует непрерывность $F(h)$ в h^0. Используя теперь свойство 6, имеем $p(h^0) = 0$, $q(h^0) = 0$, $\nabla F(h^0) = 2h^0$. Отсюда вытекает $h^0 = 0$, $[0, 0, 0] \in K$. Применение леммы 13.5 завершает доказательство для случая $h^0 \in T_3$. Если $h^0 \in T_1$, то, как нетрудно видеть, требуемое утверждение вытекает из следствия 13.3. (Случай $h^0 \in T_2$ симметричен случаю $h^0 \in T_1$.)

Через $M(h, p, q)$ обозначим множество решений задачи $L(h, p, q)$. Пусть $|I|$, $|J|$ — количество элементов в множествах $I=\{t_1, \ldots, t_{|I|}\}\subset N_n$, $J=\{s_1, \ldots, s_{|J|}\}\subset N_m$, где $t_1<t_2<\ldots<t_{|I|}$, $s_1<\ldots<s_{|J|}$. Матрицы B_I и E^J получены из $[-b, A]$ и $E_{m,m}$ соответственно путем вычеркивания столбцов a_i и e_j' с номерами $i\notin I$, $j\notin J$. Матрица D_{IJ} получена из B_I с помощью замены строк с номерами $j\in J$ на нулевые. Пусть $\tilde v=[v_0, v_1, \ldots, v_{|I|}]^T$, $(B_I\tilde v)_k$ — k-я координата вектора $B_I\tilde v$. Напомним, что $\gamma(S)$ и $\Gamma(S)$ обозначают наименьшее собственное значение матрицы S и множество соответствующих ему собственных векторов.

Теорема 13.1. *Пусть задача L — несобственная, $[h^0, p^0, q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$. Тогда имеет место следующая альтернатива:*

Либо $h^0\in T_1$, $0\in T_1$ и при некоторых (возможно пустых) фиксированных $I\subset N_n$, $J\subset N_m$ выполняются соотношения

а) $\operatorname{rang}[B_I, E^J]=1+|I|+|J|$;

б) $h_i^0=0\quad \forall i\in N_n\setminus I$, $\quad h_{t_k}^0=-v_k\|\tilde v\|^{-2}D_{IJ}\tilde v\quad \forall t_k\in I$, $p^0=v_0\|\tilde v\|^{-2}D_{IJ}\tilde v$, $q^0=0$, $\tilde v\in\Gamma(D_{IJ}^TD_{IJ})$, $\tilde v>0$, $a_i^TD_{IJ}\tilde v\geqslant 0\quad \forall i\in N_n\setminus I$, $\quad (B_I\tilde v)_j<0\quad \forall j\in J$, $(B_I\tilde v)_j\geqslant 0\quad \forall j\in N_m\setminus J$;

в) $\|[h^0, p^0, q^0]\|^2=\gamma(D_{IJ}^TD_{IJ})$;

г) $M(h^0, p^0, q^0)=M(h^0, p^0)=\{x^0\}$, *где* $\quad x_i^0=0\quad \forall i\in N_n\setminus I$, $x_{t_k}^0=v_kv_0^{-1}\quad \forall t_k\in I$;

либо $h^0\in T_2$, $0\in T_2$ (или, иначе, $h^0\in T_1^*$, $0\in T_1^*$) и при некоторых фиксированных $J^*\subset N_m$, $I^*\subset N_n$ выполняются соотношения а) — г), *сформулированные в терминах задачи* (13.6).

Доказательство. Для $[h^0, p^0, q^0]$ — точки локального минимума задачи $\mathscr{D}$ — докажем, что из $h^0\in T_1$ следует $0\in T_1$; другими словами, из всесторонности системы векторов

$$\{a_j+h_j^0, -e_i\colon j\in N_m, i\in N_n\} \tag{13.13}$$

следует всесторонность системы

$$\{a_j, -e_i\colon j\in N_m, \quad i\in N_n\}. \tag{13.14}$$

В силу следствия (13.5) h^0 — точка локального минимума $F(h)$. Тогда согласно свойству 5 имеем $h_i^0 = -\lambda_i^0 p(h^0)$, $\lambda_i^0 \geqslant 0$ $\forall i \in \mathbf{N}_n$. Из леммы 13.4 получаем $p(h^0) \in K_1^0(h^0)$; следовательно, $\left(p(h^0), e_j'\right) \geqslant 0$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$. Таким образом, $p(h^0) \geqslant 0$, $h^0 \leqslant 0$.

Для доказательства всесторонности (13.14) возьмем произвольный вектор $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. Если $x_i > 0$ при некотором $i \in \mathbf{N}_n$, то $\left(-e_i, x\right) < 0$. Если же $x \leqslant 0$, то в силу всесторонности (13.13) $\left(a_j + h_j^0, x\right) < 0$ при некотором $j \in \mathbf{N}_m$. Отсюда получаем $(a_j, x) < -\left(h_j^0, x\right) \leqslant 0$, так как $h^0 \leqslant 0$.

Справедливость импликации $h^0 \in T_2 \Rightarrow 0 \in T_2$ следует из симметричности случаев $h^0 \in T_1$ и $h^0 \in T_1^* = T_2$.

Так как задача L — несобственная, то $h^0 \notin T_3$ в силу леммы 13.5. Таким образом, для точки локального минимума $[h^0,\ p^0,\ q^0]$ выполняется одно из двух: либо $h^0 \in T_1$, $0 \in T_1$, либо $h^0 \in T_2$, $0 \in T_2$. Покажем, что в случае $h^0 \in T_1$ имеют место соотношения а) — г). Согласно следствию 13.5 h^0 — точка локального минимума функции $F(h)$. Тогда $M(h^0) = \{\lambda^0\}$ в силу свойства 5. В соответствии с пунктом 2) леммы 13.3 имеем

$$M(h^0, p^0, q^0) = M(h^0, p^0) = \{x^0\}, \quad x_i = \lambda_i^0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n. \tag{13.15}$$

Определим множества $I = \{i \in \mathbf{N}_n\colon\ \lambda_i^0 > 0\}$, $J = \{j \in \mathbf{N}_m\colon\ \lambda_{n+j}^0 > 0\}$. Предположим, что $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Так как $[h^0,\ p^0,\ q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$, то необходимо $h_i^0 = 0$ $\forall i \in \mathbf{N}_n \setminus I$. Положив $[-b,\ A_I] = B_I$, рассмотрим систему линейных уравнений

$$[A_I,\ E^J]y = b, \qquad y = [y_1,\ \ldots,\ y_{|I|+|J|}]^T.$$

Покажем, что матрица $[-p, H_I] = \left[-p^0, H_I^0\right]$, где H_I^0 составлена из столбцов $\{h_i^0\colon\ i \in I\}$, является решением задачи

$$\inf\{\|[-p,\ H_I]\|^2\colon \text{ система } [A_I + H_I,\ E^J]y = b + p \text{ совместна}\}. \tag{13.16}$$

Из $M(h^0) = \{\lambda^0\}$ вытекает, что система $\left[A_I + H_I^0, E^J\right]y = b + p^0$ имеет единственное решение $y^0 > 0$, где $y_i^0 = \lambda_{t_i}^0$ $\forall t_i \in I$, $y_{|I|+j}^0 = \lambda_{n+s_j}^0$ $\forall s_j \in J$. Тогда для $\left[-p^1, H_I^1\right]$, близкого к $[-p^0, H_I^0]$, столбцы матрицы $[A_I + H_I^1, E^J]$ будут линейно независимы. Поэтому в случае совместности системы $[A_I + H_I^1, E^J]\, y = b + p^1$ ее решение y^1, нахождение которого сводится к применению правила Крамера, будет близко к y^0. Так как $y^0 > 0$, то можно считать $y^1 > 0$, что влечет совместность системы $(A + H^1)\, x \leqslant \leqslant b + p^1$ при $h_i^1 = 0$, $x_i = 0$ $\forall i \in \mathbf{N}_n \setminus I$, $h_{t_k}^1 = \bar{h}_k^1$, $x_{t_k} = y_k^1$ $\forall t_k \in I$, где $\bar{h}_k^1$ $(k = 1, \ldots, |I|)$ — столбцы H_I^1. При этом, не ограничивая общности, можно полагать, что $h^1 \in T_1$; следовательно, $q(h^1) = q(h^0) = q^0 = 0$. Тогда

$$\|[-p^1, H_I^1]\|^2 =$$
$$= \|[-p^1, H^1]\|^2 \geqslant \|[-p^0, H^0]\|^2 = \|[-p^0, H_I^0]\|^2,$$

так как $[h^0, p^0, q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$.

Приведенные рассуждения показывают, что матрица $[-p^0, H_I^0]$ является точкой локального минимума задачи (13.16). Тогда согласно теореме 12.2 она будет решением этой задачи, и справедливы соотношения

$$[-p^0, H_I^0] = [-p(v), H_I(v)], \quad y^0 = y(v),$$

где

$$\begin{gathered} v = [\tilde{v}^T, \bar{v}^T]^T, \quad \tilde{v} = [v_0, v_1, \ldots, v_{|I|}]^T, \\ \bar{v} = [v_{|I|+1}, \ldots, v_{|I|+|J|}]^T, \\ v_0 \neq 0, \quad \tilde{v} \in \Gamma\big(B_I^T\big(E - P(E^J)\big) B_I\big), \\ E^J \bar{v} = -P(E^J)\, B_I \tilde{v}, \\ [-p(v), H_I(v)] = -\|\tilde{v}\|^{-2}\, [B_I, E^J]\, \tilde{v} v^T, \\ y(v) = v_0^{-1}\, [v_1, \ldots, v_{|I|+|J|}]^T. \end{gathered} \tag{13.17}$$

Учитывая (12.10), нетрудно видеть, что

$$[B_I, E^J]\, v = B_I \tilde{v} + E^J \bar{v} = B_I \tilde{v} - P(E^J)\, B_I \tilde{v} = D_{IJ} \tilde{v}, \tag{13.18}$$

$$B_I^T\big(E - P(E^J)\big) B_I = \big(\big(E - P(E^J)\big) B_I\big)^T \big(\big(E - P(E^J)\big) B_I\big) = D_{IJ}^T D_{IJ}, \tag{13.19}$$

$$0 < y^0 = v_0^{-1}\, [v_1, \ldots, v_{|I|+|J|}]^T. \tag{13.20}$$

Последнее показывает, что множество v, удовлетворяющих (13.17), есть $\{v\colon v^T = v_0 [1, (y^0)^T],\ v_0 \neq 0\}$. Для определенности ограничимся значениями $v_0>0$. Тогда $v>0$, $\tilde{v}>0$. Из леммы 13.4 следует

$$(a_i+h_i^0)^T D_{IJ}\tilde{v}=v_0^{-1}\|\tilde{v}\|^2(a_i+h_i^0)^T p(h^0)\geqslant 0 \quad \forall i\in \mathrm{N}_n\setminus I,$$

так как $p(h^0)=p^0=\|\tilde{v}\|^{-2}v_0 D_{IJ}\tilde{v}$ в силу (13.17), (13.18). Тогда $a_i^T D_{IJ}\tilde{v}\geqslant 0$ $\forall i\in \mathrm{N}_n\setminus I$, $(B_I\tilde{v})_j=(D_{IJ}\tilde{v})_j=v_0^{-1}\|\tilde{v}\|^2 p_j^0=$ $=v_0^{-1}\|\tilde{v}\|^2 p_j(h^0)\geqslant 0$ $\forall j\in \mathrm{N}_m\setminus J$, ввиду того, что $p(h^0)\geqslant 0$, $h^0\leqslant 0$ (как было показано выше). Так как $([B_I, E^J]\,v)_j=$ $=(D_{IJ}\tilde{v})_j=0$ $\forall j\in J$, то $(B_I\tilde{v})_{s_k}=-v_{|I|+k}<0$ $\forall s_k\in J$. Из теоремы 12.2 и (13.19) получаем $\|[h^0, p^0, q^0]\|^2=$ $=\|[-p^0, H^0]\|^2=\|[-p^0, H_I^0]\|^2=\gamma'=\gamma(D_{IJ}^T D_{IJ})$, где γ' — оптимальное значение задачи (13.16). Так как задача L — несобственная, то $\gamma(D_{IJ}^T D_{IJ})=\|[h^0, p^0, q^0]\|^2>0$. Поэтому $\det D_{IJ}^T D_{IJ}\neq 0$, что, как известно, влечет линейную независимость столбцов D_{IJ}. Отсюда легко следует а). Справедливость г) вытекает из (13.15), (13.20).

Случаи $I=\varnothing$, $J\neq\varnothing$ и $I\neq\varnothing$, $J=\varnothing$ рассматриваются аналогично (в последнем случае вместо теоремы 12.2 надо воспользоваться теоремой 12.1). Если $I=\varnothing$, $J=\varnothing$, то, очевидно, $p^0=-b$, $H^0=0$, причем $-b=p^0\neq 0$, так как задача L — несобственная. Справедливость неравенств $a_i^T D_{IJ}\tilde{v}=a_i^T p^0 v_0\geqslant 0$, $(B_I\tilde{v})_j=p_j^0 v_0\geqslant 0$ $\forall i\in \mathrm{N}_n$, $\forall j\in \mathrm{N}_m$ вытекает из следствия 13.5 и леммы 13.4. Проверка остальных соотношений из б), в), г) тривиальна.

В случае $h^0\in T_2=T_1^*$, переписав $L^*(h, p, q)$ в форме (13.6), получим задачу $\bar{L}(G, r, s)$, отличающуюся от $L(h, p, q)$ тем, что A, b, c, H, p, q, x, m, n заменены соответственно на $-A^T$, $-c$, $-b$, $-H^T=G$, $-q=r$, $-p=s$, u, n, m. Определим для задачи $\bar{L}(G, r, s)$ множества $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, $\bar{T}_3$ по аналогии с T_1, T_2, T_3. Тогда из $h^0\in T_1^*$ следует $g^0\in\bar{T}_1$, где g^0 соответствует $G^0=-(H^0)^T$. Теперь для получения а) — г) достаточно повторить приведенные рассуждения применительно к задаче $\bar{L}(G, r, s)$.

Достаточные условия для точек локального минимума дает

Теорема 13.2. *Пусть при некоторых $I\subset \mathrm{N}_n$, $J\subset \mathrm{N}_m$ для точки $[h^0, p^0, q^0]$ справедливы соотношения а), б) первого варианта альтернативы теоремы* 13.1, *причем все неравенства из б) выполняются как строгие. Тогда имеют место соотношения в), г), и, кроме того, $h^0\in T_1$,*

$0 \in T_1$, *задача* L — *несобственная*, $[h^0, p^0, q^0]$ — *точка локального минимума задачи* $\mathcal{D}$.

Аналогичный результат справедлив для $J^* \subset \mathbf{N}_m$, $I^* \subset \mathbf{N}_n$ *при выполнении соотношений а), б) второго варианта альтернативы теоремы* 13.1.

Доказательство достаточно провести для случая $I \subset \mathbf{N}_n$, $J \subset \mathbf{N}_m$. Предположим вначале, что $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Из б) и теоремы 12.2 с учетом (13.18), (13.19) вытекает, что H_I^0 (здесь и дальше используются обозначения теоремы 13.1) и p^0 являются решениями задачи (13.16). При этом из а) и $\tilde{v} > 0$ легко следует $D_{IJ}\tilde{v} \neq 0$, $p^0 \neq 0$. Так как $[-p^0, H_I^0]$ — решение (13.16) и $p^0 \neq 0$, то необходимо

$$\bar{\gamma} = \inf\{\|[-p, H_I]\|^2 \colon [A_I + H_I^0 + H_I, E^J]\,y = \\ = b + p,\ y \in \mathbf{R}^{|I|+|J|}\} \neq 0$$

или, согласно теореме 12.2,

$$\bar{\gamma} = \gamma([-b, A_I + H_I^0]^T (E - P(E^J))[-b, A_I + H_I^0]) \neq 0.$$

Учитывая (12.10), имеем

$$0 \neq \gamma([-b, A_I + H_I^0]^T (E - P(E^J))[-b, A_I + H_I^0]) = \\ = \gamma(D_1^T D_1) = \gamma([-b, A_I + H_I^0]_J^T [-b, A_I + H_I^0]_J), \quad (13.21)$$

где $D_1 = (E - P(E^J))[-b, A_I + H_I^0]$, индекс J внизу справа означает, что строки матрицы с номерами $j \in J$ заменены нулевыми. Из (13.21) следует линейная независимость столбцов матриц $[-b, A_I + H_I^0]_J$, $[A_I + H_I]_J$, что, в свою очередь, влечет $\operatorname{rang}[A_I + H_I^0, E^J] = |I| + |J|$.

Так как $[-p^0, H_I^0]$ — решение (13.16), то согласно теореме 12.2

$$[A + H_I^0, E^J]\,y(v) = b + p^0, \quad (13.22)$$

где $y(v) = v_0^{-1}[v_1, \ldots, v_{|I|+|J|}]^T > 0$ ввиду того, что $\tilde{v} > 0$,

$$(B_I\tilde{v})_j < 0 \quad \forall j \in J,$$

$$v_{|I|+k} = (E^J\tilde{v})_{s_k} = (-P(E^J)B_I\tilde{v})_{s_k} > 0 \quad \forall s_k \in J.$$

Отсюда вытекает $p^0 \in K_b(h^0)$. Так как, кроме того,

$$[-b - p^0, A_I + H_I^0]^T p^0 = \\ = v_0\|\tilde{v}\|^{-2} B_I^T D_{IJ}\tilde{v} + v_0\|\tilde{v}\|^{-2}[-p^0, H_I^0]^T D_{IJ}\tilde{v} =$$

$$= v_0\|\tilde v\|^{-2}(D_{IJ}^TD_{IJ}\tilde v - \|\tilde v\|^{-2}(D_{IJ}\tilde v\tilde v^T)^TD_{IJ}\tilde v) =$$
$$= v_0\|\tilde v\|^{-2}(\gamma(D_{IJ}^TD_{IJ})\tilde v - \|\tilde v\|^{-2}\tilde v\tilde v^TD_{IJ}^TD_{IJ}\tilde v) =$$
$$= v_0\|\tilde v\|^{-2}(\gamma(D_{IJ}^TD_{IJ})\tilde v - \|\tilde v\|^{-2}\tilde v\tilde v^T\gamma(D_{IJ}^TD_{IJ})\tilde v) = 0,$$
$$p_j^0 = v_0\|\tilde v\|^{-2}(D_{IJ}\tilde v)_j = 0 \quad \forall j \in J,$$
$$p_j^0 = v_0\|\tilde v\|^{-2}(D_{IJ}\tilde v)_j = v_0\|\tilde v\|^{-2}(B_I\tilde v)_j > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m\setminus J,$$
$$a_i^Tp^0 = v_0\|\tilde v\|^{-2}a_i^TD_{IJ}\tilde v > 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n\setminus I, \qquad (13.23)$$

то $p^0 = p(h^0)$ в силу леммы 13.4. Тогда $(p^0+\varepsilon u)^T[A+H^0, E] > 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, где $u \in \mathbf{R}^m$ взято из условия $u^T[A_I + H_I^0, E^J] > 0$. Это показывает, что $h^0 \in T_1$. Таким образом, существует $O(h^0)$ — окрестность точки h^0 такая, что $h \in T_1$, $g(h) = 0$, $(p(h), a_i + h_i) > 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n\setminus I$, $p_j(h) > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m\setminus J$ для всех $h \in O(h^0)$ (здесь использованы следствие 13.3 и (13.23)). Тогда из следствия 13.4 вытекает, что для каждого $h \in O(h^0)$

$$p(h) = -b + \sum_{i\in I}\lambda_i(a_i + h_i) + \sum_{j\in J}\lambda_{n+j}e_j' \quad \forall \lambda \in M(h). \qquad (13.24)$$

Итак, пусть $[h^0, p^0, q^0]$ не является точкой локального минимума задачи $\mathscr{D}$. Тогда найдется точка $[h^1, p^1, q^1]$ такая, что $h^1 \in O(h^0)$, $\|[h^1, p^1, q^1]\|^2 < \|[h^0, p^0, q^0]\|^2$. Так как $q^0 = q(h^0) = 0$, то

$$\|[-p(h^1), H^1]\|^2 = \|[h^1, p(h^1), 0]\|^2 \leqslant \|[h^1, p^1, q^1]\|^2 <$$
$$< \|[h^0, p^0, q^0]\|^2 = \|[-p^0, H^0]\|^2,$$

причем система $[A_I + H_I^1, E^J]y = b + p(h^1), y \in \mathbf{R}^{|I|+|J|}$ совместна в силу (13.24), что противоречит тому, что $[-p^0, H_I^0]$ — решение задачи (13.16). Следовательно, $[h^0, p^0, q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$.

Из $B_I^TD_{IJ}\tilde v = D_{IJ}^TD_{IJ}\tilde v = \gamma(D_{IJ}^TD_{IJ})\tilde v > 0$ и (13.23) вытекает $[-b, A]p^0 > 0$, $p_j^0 > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m\setminus J$, $p_j^0 = 0 \quad \forall j \in J$. Тогда $(p^0 + \varepsilon u)^T[-b, A, E] > 0$ при $u \in \mathbf{R}^m$, $u > 0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Следовательно, $0 \in T_2^* = T_1$,

$$0 \notin K_b(0) = -b + \{u = [A, E]\lambda\colon \lambda \in \mathbf{R}_+^{n+m}\}, \qquad (13.25)$$

и задача L — несобственная. Отсюда с учетом (13.15), (13.22) и (13.24) получаем г). Наконец, так как

$[-p^0, H_I^0]$ — решение (13.16), то $\|[h^0, p^0, q^0]\|^2 = \|[-p^0, H_I^0]\|^2 = \gamma(D_{IJ}^T D_{IJ})$ согласно (13.19).

Случаи $I=\varnothing$, $J\neq\varnothing$ и $I\neq\varnothing$, $J=\varnothing$ рассматриваются аналогично (в последнем случае вместо теоремы 12.2 надо воспользоваться теоремой 12.1). Если $I=\varnothing$, $J=\varnothing$, то из а), б) вытекает $h^0=0$, $p^0=-b\neq 0$, $[-b,\ A,\ E]^T p_0>0$, $h^0=0\in T_1$, $\|[h^0, p^0, q^0]\|^2=\|-b\|^2=\gamma(D_{IJ}^T D_{IJ})$. Тогда $p^0 = p(h^0)$ согласно лемме 13.4; $M(h^0,\ p^0,\ q^0)=M(h^0,\ p^0)=\{0\}$ в силу следствия 13.4 и леммы 13.3. По аналогии с (13.25) имеем $0\notin K_b(0)$, L — несобственная. Из $[A,\ E]^T p^0>0$ и леммы 13.4 следует, что $p^0=p(h)$ при достаточно малых h. Отсюда вытекает, что $[h^0,\ p^0,\ q^0]$ — точка локального минимума задачи $\mathscr{D}$.

13.4. Анализ задачи $\mathscr{D}$. Пусть $K_1(h)=b+K_b(h)$, $K_2(h)=c+K_c(h)$; $\widetilde{w}=\operatorname{opt}\mathscr{D}$; $\operatorname{int}M$ — внутренность множества M. Следующее утверждение описывает множество всех несобственных задач L, которые могут быть превращены в собственные путем сколь угодно малой вариации векторов c, b и матрицы A.

Теорема 13.3. *Пусть задача L — несобственная. Равенство $\widetilde{w}=0$ имеет место тогда и только тогда, когда $0\in T_3$ и выполняется по крайней мере одно из условий*: 1) $b\notin\operatorname{int}(-K_1(0))$, 2) $c\notin\operatorname{int}(-K_2(0))$.

Доказательство. Пусть $0\in T_3$, $b\notin\operatorname{int}(-K_1(0))$. Согласно теореме отделимости выпуклых множеств при некотором $u^0\in\mathbf{R}^m$, $u^0\neq 0$ имеем $(u^0,\ b)\geqslant 0$, $(u^0,\ u)\leqslant 0$ $\forall u\in -K_1(0)$, что эквивалентно условию $[b,\ A,\ E]^T u^0\geqslant 0$. Положим $y^k=u^0+\varepsilon_k^2 v$, $h_i^k=\varepsilon_k b+\varepsilon_k^2 v$ $\forall i\in\mathbf{N}_n$, $\forall k$, где $v\in\mathbf{R}^m$, $v>0$, $\|v\|=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$, $0<\varepsilon_k<1$ $\forall k$. Не ограничивая общности, можно считать $(u^0,\ v)>2\max\{\|b\|,\ \|a_i\|:\ i\in\mathbf{N}_n\}$. Тогда

$$(y^k, a_i+h_i^k)>\varepsilon_k^2(u^0,v)+\varepsilon_k^2(v,a_i)+\varepsilon_k^3(v,b)>$$
$$>\varepsilon_k^2[(u^0,v)-\|a_i\|-\|b\|]>0,\quad y^k>0\quad \forall i\in\mathbf{N}_n,\quad \forall k.$$

Следовательно, $h^k\in T_2^*=T_1$, $q(h^k)=0$ $\forall k$. Из $0\in T_3$ вытекает $Ax^0+u=0$ при некоторых $x^0\in\mathbf{R}_+^n$, $x^0\neq 0$, $u\in\mathbf{R}_+^m$. Положив

$$\beta_k=\varepsilon_k^{-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i^0\right)^{-1},\quad x^k=\beta_k x^0,\quad u^k=\beta_k u,$$

имеем

$$K_1(h^k) \ni$$
$$\ni (A + H^k)x^k + u^k = Ax^k + (\varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 v)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) + u^k =$$
$$= \beta_k (Ax^0 + u) + (\varepsilon_k b + \varepsilon_k^2 v)\varepsilon_k^{-1} = b + \varepsilon_k v \quad \forall k,$$

откуда следует $\|p(h^k)\| \leqslant \|\varepsilon_k v\| \to 0$ $(k \to \infty)$. Таким образом, $h^k \to 0$, $F(h^k) \to 0$ $(k \to \infty)$, т. е. $\tilde{w} = 0$. Случай $0 \in T_3$, $c \notin \operatorname{int}(-K_2(0))$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\tilde{w} = 0$. Если $0 \notin T_3$, то $F(h) \geqslant \mathrm{const} > 0$ в некоторой ε-окрестности нуля, так как L — несобственная, а $F(h)$ непрерывна на $T_1 \cup T_2$. За пределами же этой окрестности $F(h) \geqslant \|h\|^2 \geqslant \varepsilon^2 > 0$. Учитывая очевидное равенство $\tilde{w} = \inf F(h)$, заключаем, что $0 \in T_3$.

Предположим, что не выполняются условия 1), 2) и существуют последовательности $\{h^k\}$, $\{u^k\}$, $\{x^k\}$ со свойствами $u^k \in K_1(h^k)$, $x^k \in K_2(h^k)$ $\forall k, \lim\limits_{k\to\infty} h^k = 0, \lim\limits_{k\to\infty}(-b + u^k) = 0, \lim\limits_{k\to\infty}(-c + x^k) = 0$. Последовательность $\{h^k\}$ содержит по крайней мере одну из двух подпоследовательностей $\{h^{k_l}\}$, $\{h^{k_s}\}$, где $h^{k_l} \notin T_2$ $\forall k_l, h^{k_s} \notin T_1$ $\forall k_s$. Рассматривая первую из этих возможностей, для упрощения записи будем считать $h^k \notin T_2$ $\forall k$. Тогда для каждого k существует $z^k \in K_1^*(h^k)$, $(z^k, u^k) \geqslant 0$, $z^k \neq 0$. Не уменьшая общности, можно полагать $\|z^k\| = 1$ $\forall k, \lim\limits_{k\to\infty} z^k = z^0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в соотношениях $[A + H^k, E]^T z^k \geqslant 0$, $(z^k, u^k) \geqslant 0$, $\|z^k\| = 1$, получаем

$$[A, E]^T z^0 \geqslant 0, \quad (z^0, b) \geqslant 0, \quad \|z^0\| = 1, \tag{13.26}$$

значит, $z^0 \in K_1^0(0)$. Тогда из $b \in \operatorname{int}(-K_1(0))$ вытекает $-b \in \operatorname{int} K_1(0)$, $(z^0, -b) > 0$, что противоречит (13.26).

Аналогично рассматривается случай, когда $\{h^k\}$ содержит подпоследовательность $\{h^{k_s}\}$ такую, что $h^{k_s} \notin T_1$ $\forall k_s$.

Замечание 13.1. Как видно из доказательства, выполнение условий 1), 2) эквивалентно совместности систем

$$\begin{aligned} &1) \quad [b, A, E]^T u \geqslant 0, \quad u \neq 0; \\ &2) \quad [c, A^T, -E]^T x \geqslant 0, \quad x \neq 0 \end{aligned} \tag{13.27}$$

соответственно.

Замечание 13.2. В случае $\widetilde{w}=0$ приведенное доказательство для каждого $\varepsilon>0$ дает способ построения $[h^\varepsilon, p^\varepsilon, q^\varepsilon]\in K$ такого, что $\|[h^\varepsilon, p^\varepsilon, q^\varepsilon]\|\leqslant\varepsilon$.

Следствие 13.6. *Пусть* $0\in T_3$, L — *несобственная задача* 1-го *или* 2-го *рода. Тогда* $\widetilde{w}=0$.

Доказательство. Пусть, например, L — несобственная задача 2-го рода. Тогда $p(0)=0$; следовательно, $0\in -b+K_1(0)$, $b\in K_1(0)$. Отсюда получаем $[b, A, E]^T u\geqslant\geqslant 0$; существование $u\neq 0$, $[A, E]^T u\geqslant 0$ вытекает из $0\in\in T_3$. Осталось учесть (13.27), и следствие доказано.

Согласно теореме 13.1, в случае, когда L — несобственная и $0\in T_3$, задача $\mathscr{D}$ не имеет точек локального минимума. В силу леммы 13.1 случай $0\in T_3$ неустойчив, так что, например, для каждого $\varepsilon>0$ найдутся h^1 и h^2, для которых выполняется $\|h^i\|\leqslant\varepsilon$, $h^i\in T_i$ $(i=1, 2)$, что согласно (13.3) влечет $M^*(h^1, 0)\neq\varnothing$, $M(h^2, 0)\neq\varnothing$. Ниже рассматривается случай $0\in T_1$ (случай $0\in T_2$ полностью симметричен).

Используя соотношения а), б) теоремы 13.1, определим несколько множеств. Через G_1 обозначим множество точек $[h^0, p^0, q^0]$, удовлетворяющих а), б) при каких-то $I\subset \mathbf{N}_n$, $J\subset\mathbf{N}_m$; через G_2 — множество $[h^0, p^0, q^0]\in G_1$, для которых выполняется $h^0\in T_1$; через G_3 — множество $[h^0, p^0, q^0]\in G_1$, для которых все неравенства пункта б) выполняются как строгие; через K_0 — множество точек локального минимума задачи $\mathscr{D}$. Способ построения множеств G_1, G_2, G_3 вытекает из их определения.

Доказываемые ниже утверждения показывают возможности использования полученных результатов для решения задачи $\mathscr{D}$.

Лемма 13.6. *Для каждого* $[h^0, p^0, q^0]\in G_1$ *выполняется* $h^0\in T_1\cup T_3$, $p^0=p(h^0)$, $M(h^0, p^0)\neq\varnothing$. *Если* L — *несобственная и* $0\in T_1$, *то*

$$G_3\subset K_0\subset G_2\subset G_1,\qquad G_2\subset K. \tag{13.28}$$

Доказательство. Соотношения $p^0\neq 0$, $p^0=p(h^0)$ для $[h^0, p^0, q^0]\in G_1$ обосновываются так же, как в теореме 13.2. В силу (13.3) и определения $p(h^0)$ отсюда вытекает $h^0\notin T_2$, $M(h^0, p^0)\neq\varnothing$.

Из $G_2\subset G_1$, $h^0\in T_1$ следует $p^0=p(h^0)\in K_b(h^0)$, $q^0\in\in \mathbf{R}^n=K_c(h^0)$ соответственно, где $[h^0, p^0, q^0]\in G_2$. Поэтому $G_2\subset K$. Справедливость остальных включений из (13.28) вытекает из теорем 13.1 и 13.2.

Пусть $b^- = -(-b)^+$. Нам понадобится следующая лемма, доказываемая аналогично лемме 12.1.

Лемма 13.7. *Минимальная по норме матрица A, удовлетворяющая системе $Ax \leqslant b$ при заданных $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, $b \in \mathbf{R}^m$, единственна и дается формулой*

$$A = \|x\|^{-2} b^- x^T, \quad \|A\| = \|x\|^{-1} \|b^-\|.$$

Лемма 13.8. *Пусть $0 \in T_1 \cup T_3$. Тогда для задач*

$$C_1\colon \ \min\{\|h\|^2\colon\ h \in T_3\}, \quad (=w') \tag{13.29}$$

$$C_2\colon \ \min\{\|(Ax)^+\|^2\colon\ \|x\| = 1, \quad x \geqslant 0\} \quad (=w_0) \tag{13.30}$$

справедливы соотношения: $w' = w_0$,

$$\operatorname{Arg} C_1 = \{H = -(Ax)^+ x^T\colon x \in \operatorname{Arg} C_2\} \neq \varnothing. \tag{13.31}$$

Доказательство. Пусть $0 \in T_1 \cup T_3$. Используя определения множеств T_i ($i = 1, 2, 3$) и леммы 13.1, 13.7, преобразуем задачу (13.29):

$$\begin{aligned} w' = \min\{\|h\|^2\colon\ h \in T_3\} &= \min\{\|h\|^2\colon\ h \in T_3 \cup T_2\} = \\ &= \min\{\|H\|^2\colon\ (A + H)x \leqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad x \neq 0\} = \\ &= \min\{\|H\|^2\colon\ Hx \leqslant -Ax, \quad x \geqslant 0, \quad \|x\| = 1\} = \\ &= \min\{\|x\|^{-2}\|(-Ax)^-\|^2\colon\ x \geqslant 0, \quad \|x\| = 1\} = \\ &= \min\{\|(Ax)^+\|^2\colon\ x \geqslant 0, \quad \|x\| = 1\} = w_0. \end{aligned} \tag{13.32}$$

Теперь требуемое утверждение вытекает из (13.32) и леммы 13.7.

Лемма 13.9. *Если $0 \in T_1$ и при некотором $[h, p, q] \in K$ выполняется $\|[h, p, q]\|^2 < w_0$, то нижняя грань в задаче $\mathscr{D}$ достигается.*

Доказательство. Пусть $[h^k, p^k, q^k] \in K$ $\forall k$, $\|[h^k, p^k, q^k]\|^2 \to \widetilde{w}$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать $[h^k, p^k, q^k] \to [h^0, p^0, q^0]$ при $k \to \infty$, причем $\|[h^0, p^0, q^0]\|^2 < w_0$; следовательно, $\|h^0\|^2 < w_0$, $h^0 \in T_1$. Так как $\widetilde{w} \leqslant F(h^k) \leqslant \|[h^k, p^k, q^k]\|^2$, то $\lim\limits_{k\to\infty} F(h^k) = \widetilde{w}$. Тогда из непрерывности $F(h)$ в $h^0 \in T_1$ вытекает $\widetilde{w} = F(h^0)$, т. е. $\widetilde{w}$ достигается в точке $[h^0, p(h^0), q(h^0)] \in K$.

Лемма 13.10. *Пусть $0 \in T_1$, при некотором $h^0 \in \operatorname{Arg} C_1$ выполняется по крайней мере одно из условий:*

1) $b \notin \operatorname{int}(-K_1(h^0))$, 2) $c \notin \operatorname{int}(-K_2(h^0))$.

Тогда $\widetilde{w} \leqslant w_0$ и существует последовательность

$$\{[h^k, p^k, q^k]\} \subset K, \quad [h^k, p^k, q^k] \to [h^0, 0, 0] \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

При этом, если нижняя грань в задаче $\mathscr{D}$ не достигается, то $\widetilde{w} = w_0$.

Доказательство. Если в качестве L взять задачу $L(h^0, 0, 0)$, то для нее выполнено по крайней мере одно из условий 1), 2) из теоремы 13.3 и $0 \in T_3$. Для этого случая при доказательстве теоремы 13.3 была построена последовательность, соответствующая последовательности $\{[h^k, p^k, q^k]\}$, упомянутой в формулировке доказываемой леммы. Следовательно, $\widetilde{w} \leqslant w_0$.

Пусть нижняя грань в задаче $\mathscr{D}$ не достигается. Тогда существует последовательность $\{[h^l, p^l, q^l]\} \subset K$, $\lim\limits_{l\to\infty} [h^l, p^l, q^l] = [h', p', q']$, $\lim\limits_{l\to\infty} \| [h^l, p^l, q^l] \|^2 = \widetilde{w}$. Из $\widetilde{w} \leqslant F(h^l) \leqslant \| [h^l, p^l, q^l] \|^2$ вытекает $\lim\limits_{l\to\infty} F(h^l) = \widetilde{w}$. Так как $\widetilde{w}$ не достигается, то $F(h)$ терпит разрыв в h', поэтому $h' \in T_3$. Отсюда, с учетом того, что

$$\| h' \|^2 = \lim_{l\to\infty} \| h^l \|^2 \leqslant \widetilde{w} \leqslant w_0 = \| h^0 \|^2, \quad h^0 \in \operatorname{Arg} C_1,$$

следует $\|h'\|^2 = \widetilde{w} = w_0 = \|h^0\|^2$. Лемма доказана.

Замечание 13.3. Рассматривая замечания 13.1, 13.2 и следствие 13.6 применительно к задаче $L(h^0, 0, 0)$, получаем:

1. Выполнение условий 1), 2) леммы 13.10 эквивалентно совместности систем

$$1) \qquad [b,\ A + H^0,\ E]^T u \geqslant 0, \quad u \neq 0;$$

$$2) \qquad [c,\ (A + H^0)^T,\ -E]^T x \geqslant 0, \quad x \neq 0.$$

2. Доказательство теоремы 13.3 дает для каждого $\varepsilon > 0$ способ построения $[h^\varepsilon, p^\varepsilon, q^\varepsilon] \in K$ такого, что $\|[h^\varepsilon - h^0, p^\varepsilon, q^\varepsilon]\| < \varepsilon$.

3. Если $L(h^0, 0, 0)$ — собственная задача, либо несобственная 1-го или 2-го рода, то выполняется по крайней мере одно из условий 1), 2) леммы 13.10.

13.5. Аппроксимация систем линейных неравенств. Рассмотрим задачу

$$\inf \{\|[-p,\ H]\|^2 = \|p\|^2 + \|H\|^2\colon\ M(h,\ p) \neq \varnothing\}, \tag{13.33}$$

и пусть w_1 — ее оптимальное значение. Положим в задаче L $c = 0$. Тогда $M^*(h, 0) \neq \varnothing$ (при всех $h \in \mathbf{R}^{mn}$), $\widetilde{w} = w_1$ и множество точек локального минимума задачи $\mathscr{D}$ совпадает с множеством всех точек $[h, p, 0]$ таких, что

$[-p,\ H]$ — точка локального минимума задачи (13.33) (точка локального минимума задачи (13.33) определяется аналогично точке локального минимума задачи $\mathscr{D}$). Благодаря этому все доказанные в п.п. 13.3, 13.4 утверждения переносятся на случай линейных неравенств. Например, из теорем 13.1, 13.3 и леммы 13.10 вытекают:

Следствие 13.7. *Пусть* $M(0,\ 0)=\varnothing$, $[-p^0,\ H^0]$ — *точка локального минимума задачи* (13.33). *Тогда имеет место первый случай теоремы* 13.1.

Следствие 13.8. *Пусть* $M(0,\ 0)=\varnothing$. *Тогда равенство* $w_1=0$ *эквивалентно совместности системы* $Ax\leqslant 0$, $x\geqslant 0$, $x\neq 0$.

Доказательство. Из теоремы 13.3 получаем: $w_1=0\Leftrightarrow 0\in T_3$, а несовместность системы $Ax<0$, $-x<0$ из определения T_3, как нетрудно видеть, гарантируется условием $M(0,\ 0)=\varnothing$.

Следствие 13.9. *Пусть* $0\in T_1$. *Если нижняя грань в задаче* (13.33) *не достигается, то* $w_1=w_0$. *В противном случае* $w_1\leqslant w_0$.

Рассмотрим задачи

$$\inf\{\|Q_1[-p,\ H]Q_2\|^2\colon\ (A+H)x\leqslant b+p,\ A_0x\leqslant b^0\},\tag{13.34}$$

$$\inf\{\|(Bz)^+\|^2\colon\ B_0z\leqslant 0,\quad (s,\ z)>0,\quad \|z\|=1\},\tag{13.35}$$

где Q_1, Q_2 — неособенные весовые матрицы размерности $m\times m$ и $(n+1)\times(n+1)$, A_0 — матрица $l\times n$, $b^0\in\mathbf{R}^l$, $B=Q_1[-b,\ A]Q_2$, $B_0=[-b^0,\ A_0]Q_2$, $z=[z_1,\ \ldots,\ z_{n+1}]^T$, s — первая вектор-строка матрицы Q_2. Систему $A_0x\leqslant b^0$, коэффициенты которой не корректируются, естественно предполагать совместной. В случае $Q_1=E_{m,m}$, $Q_2=E_{n+1,n+1}$, $A_0=-E_{n,n}$, $b^0=0$ задача (13.34) совпадает с задачей (13.33).

Пусть $y=[y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n]^T$. Определим $H(z)$, $p(z)$, $x(z)$ с помощью соотношений

$$[-p(z), H(z)]=Q_1^{-1}G(z)\,Q_2^{-1},\qquad G(z)=-(Bz)^+z^T,$$

$$x(z)=y_0^{-1}[y_1,\ldots,y_n]^T,\qquad y=Q_2z.$$

Множество всех троек $(H,\ p,\ x)\in M_1=\{(H,\ p,\ x)\colon$ $(A+H)x\leqslant b+p,\ A_0x\leqslant b^0\}$, удовлетворяющих равенству $\|Q_1[-p,\ H]Q_2\|^2=w_2$, где w_2 — оптимальное значение задачи (13.34), обозначим через $\widetilde{M}_1$. Допустимое и оптимальное множества задачи (13.35) обозначим через M_2 и $\widetilde{M}_2$.

Теорема 13.4. *Для задач* (13.34), (13.35) *справедливы соотношения* $w_2 = w_3$, *где* w_3 — *оптимальное значение задачи* (13.35),

$$\tilde{M}_1 = \{(H(z),\ p(z),\ x(z)) \colon\ z \in \tilde{M}_2\}; \tag{13.36}$$

$$\begin{gathered} (H(z),\ p(z),\ x(z)) \in M_1, \\ \|Q_1[-p(z),\ H(z)]Q_2\|^2 = \|(Bz)^+\|^2 \quad \forall z \in M_2. \end{gathered} \tag{13.37}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что условие $(H,\ p,\ x) \in M_1$ можно записать в следующем, эквивалентном виде:

$$\begin{gathered} [-p, H]\, y \leqslant -[-b, A]\, y, \quad [-b^0, A^0]\, y \leqslant 0, \\ y_0 > 0, \quad x = y_0^{-1}[y_1, \ldots, y_n]^T. \end{gathered} \tag{13.38}$$

Так как матрицы Q_1, Q_2 — неособенные, то (13.38) эквивалентна системе

$$\begin{gathered} Q_1[-p, H]\, Q_2 z \leqslant -Q_1[-b, A]\, Q_2 z, \quad [-b^0, A_0]\, Q_2 z \leqslant 0, \\ (s, z) > 0, \quad y = Q_2 z, \quad x = y_0^{-1}[y_1, \ldots, y_n]^T \end{gathered}$$

или (если использовать введенные обозначения и учесть, что, не ограничивая общности, можно считать $\|z\| = 1$) системе

$$\begin{gathered} Q_1[-p,\ H]Q_2 \leqslant -Bz, \quad B_0 z \leqslant 0, \quad (s,\ z) > 0, \\ \|z\| = 1, \quad x = x(z). \end{gathered} \tag{13.39}$$

Тогда, обозначив для простоты $Q_1[-p,\ H]Q_2$ через G, задачу (13.34) можно переписать в виде

$$\inf\{\|G\|^2\colon\ Gz \leqslant -Bz, \quad z \in M_2\}. \tag{13.40}$$

Согласно лемме 13.7 для каждого $z \neq 0$ (в частности, для $z \in M_2$) наименьшая по норме матрица G, удовлетворяющая системе $Gz \leqslant -Bz$, единственна и имеет вид

$$G = \|z\|^{-2}(-Bz)^- z^T = -\|z\|^{-2}(Bz)^+ z^T = G(z)$$

и

$$\|G\|^2 = \|z\|^{-2}\|(Bz)^+\|^2 = \|(Bz)^+\|^2.$$

Отсюда немедленно вытекает (13.37). Кроме того, продолжая (13.40), имеем $w_2 = \inf\{\|(Bz)^+\|^2\colon\ z \in M_2\} = w_3$.

Если $(H,\ p,\ x) \in \tilde{M}_1 \subset M_1$, то из эквивалентности систем (13.38) и (13.39) вытекает $Q_1[-p,\ H]Q_2 \leqslant -Bz$, $x = x(z)$ при некотором $z \in M_2$. Тогда в силу леммы 13.7

необходимо $Q_1[-p, \ H]Q_2 = G(z)$, $\|(Bz)^+\|^2 = \|G(z)\|^2 = \|Q_1[-p, \ H]Q_2\|^2 = w_2 = w_3$, т. е. $H = H(z)$, $p = p(z)$, $x = x(z)$, $z \in \widetilde{M}_2$. Справедливость обратного включения в (13.36) следует из (13.37) и равенства $w_2 = w_3$. Теорема доказана.

Замечание 13.4. Пусть $Q_2 = E_{n+1,\,n+1}$. Для $z \in M_2$, очевидно, выполняется $\|x(z)\|^2 = z_1^{-2}(\|z\|^2 - z_1^2) = z_1^{-2}(1 - z_1^2)$. Поэтому дополнительным ограничениям вида $\|x\|^2 \leqslant d_1$, $\|x\|^2 \geqslant d_2$, вводимым в задачу (13.34), будут соответствовать дополнительные ограничения задачи (13.35) вида $z_1^2 \geqslant (1 + d_1)^{-1}$, $z_1^2 \leqslant (1 + d_2)^{-1}$.

Замечание 13.5. Используя вместо леммы 13.7 лемму 12.1, можно получить аналог теоремы 13.4 для системы $Ax = b$, $A_0x \leqslant b^0$. При этом замечание 13.4 сохраняет силу.

Радиусом совместности системы

$$Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0 \tag{13.41}$$

назовем величину $r_1 = \inf\{\|[-p, \ H]\|^2 \colon M(h, \ p) = \varnothing\}$. Величину w_1, в свою очередь, можно назвать *радиусом несовместности* системы (13.41).

Лемма 13.11. *Справедливо соотношение*

$$r_1 = \inf\{\|([b, \ -A]^T u)^+\|^2 \colon u \geqslant 0, \ \|u\| = 1\}.$$

Доказательство. Условие $M(h, \ p) = \varnothing$ эквивалентно совместности системы

$$(A + H)^T u \geqslant 0, \quad (b + p, \ u) < 0, \quad u \geqslant 0$$

(см., например, [36, с. 27]). Тогда нетрудно видеть, что $r_1 = \inf\{\|[-p, \ H]\|^2 \colon (A + H)^T u \geqslant 0, \ (b + p, \ u) < 0, \ u \geqslant 0\} = \inf\{\|[p, \ -H]^T\|^2 \colon [p, \ -H]^T u \leqslant [-b, \ A]^T u, \ u \geqslant 0, \ u \neq 0\}$. Осталось применить лемму 13.7 к системе $[p, \ -H]^T u \leqslant [-b, \ A]^T u$ и заменить условие $u \neq 0$ на условие $\|u\| = 1$.

Величину $r = \inf\{\|[-p, \ H]\|^2 \colon$ система $(A + H)x = b + p$ несовместна$\}$ назовем *радиусом совместности* системы (12.1). Величину $r' = \gamma_0$ назовем *радиусом несовместности* системы (12.1).

Лемма 13.12. *Справедливы равенства*

$$r = \gamma(AA^T), \quad r' = \gamma([-b, \ A]^T[-b, \ A]).$$

Доказательство. Второе из доказываемых равенств вытекает из теоремы 12.1. Согласно, например, [78, с. 108], несовместность системы $(A + H)x = b + p$ эквивалентна совместности системы $(A+H)^T u = 0$, $(b+p, u) \neq 0$. Тогда нетрудно видеть, что $r = \inf\{\|[-p, H]\|^2\colon (A+H)^T u = 0,\ (b+p, u) \neq 0\} = \inf\{\|H^T\|^2\colon H^T u = -A^T u,\ u \neq 0\}$. Применяя лемму 12.1 к системе $H^T u = -A^T u$ и используя принцип Рэлея (см., например, [78, с. 307]), получаем

$$r = \inf\{\|u\|^{-2}\|A^T u\|^2\colon u \neq 0\} = \gamma(AA^T).$$

§ 14. Методы итеративной коррекции, основанные на использовании функции Лагранжа

Ниже будет идти речь о методе итеративной коррекции задач

$$L\colon \max\{(c, x)\colon Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\}, \tag{14.1}$$

$$L^*\colon \min\{(b, u)\colon A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\}, \tag{14.2}$$

основанном на сведении этих задач к задаче отыскания седловой точки функции Лагранжа $F(x, u) = (c, x) - (u, Ax - b)$, $[x, u] \geqslant 0$. Эти методы, отнесенные к функции $F(x, u)$, в случае неразрешимости задач (14.1), (14.2) приводят к множеству седловых точек другой функции, а именно, функции Лагранжа задач

$$\max\{(c - \tilde{q}, x)\colon Ax \leqslant b + \tilde{p},\ x \geqslant 0\}, \tag{14.3}$$

$$\min\{(b + \tilde{p}, u)\colon A^T u \geqslant c - \tilde{q},\ u \geqslant 0\}, \tag{14.4}$$

где

$$[\tilde{q}, \tilde{p}] = \arg\min\{\|q\|^2 + \|p\|^2\colon [q, p] \in K\}, \tag{14.5}$$

$K = \{[q, p]\colon$ задача (14.3) разрешима$\}$ (см. § 11).

Отметим, что в случае разрешимости (14.1), (14.2) $\tilde{q} = 0$, $\tilde{p} = 0$, и аппроксимирующие задачи (14.3), (14.4) просто совпадают с исходными.

14.1. Предварительные замечания. Условие (14.5) естественным образом распадается на два:

$$\{\tilde{q}\} \times M^* = \operatorname{Arg}\min\{\|q\|^2\colon q + A^T u \geqslant c,\ u \geqslant 0\};$$

$$\{\tilde{p}\} \times M = \operatorname{Arg}\min\{\|p\|^2\colon -p + Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\};$$

здесь M и M^* — допустимые множества задач (14.3) и (14.4) соответственно.

Из условий оптимальности для первой из этих задач квадратичного программирования (см., например, [36]) следует

$$\tilde{q} \geqslant 0,\quad A\tilde{q} \leqslant 0,\quad (\tilde{q}, A^T u) = 0,$$

$$(\tilde{q}, A^T u - c + \tilde{q}) = 0 \quad \forall u \in M^*.$$

Аналогично, из условий оптимальности для второй из этих задач имеем

$$\tilde{p} \geqslant 0, \quad A^T\tilde{p} \geqslant 0, \quad (\tilde{p}, Ax) = 0,$$
$$(\tilde{p}, Ax - b - \tilde{p}) = 0 \quad \forall x \in M.$$

Отсюда, если для векторов $x \geqslant 0$ и $u \geqslant 0$ выполняются соотношения $Ax \leqslant b + \tilde{p}$, $A^Tu \geqslant c - \tilde{q}$, $(c - \tilde{q}, x) = (b + \tilde{p}, u)$, то аналогичные соотношения выполняются, очевидно, и для векторов $x_\alpha = x + \alpha\tilde{q} \geqslant 0$, $u_\beta = u + \beta\tilde{p} \geqslant 0$ при всех $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Иными словами, для $\tilde{M}$ и $\tilde{M}^*$ — множеств оптимальных решений задач (14.3) и (14.4) соответственно — справедливы включения:

$$\tilde{M} + \alpha\tilde{q} \subset \tilde{M} \quad \forall \alpha \geqslant 0, \tag{14.6}$$
$$\tilde{M}^* + \beta\tilde{p} \subset \tilde{M}^* \quad \forall \beta \geqslant 0. \tag{14.7}$$

Как следствие отметим, что при $\tilde{q} \neq 0$ множество $\tilde{M}$ не ограничено. Если же $\tilde{p} \neq 0$, то, напротив, не ограничено множество $\tilde{M}^*$.

Далее понадобится еще одно свойство вектора $[\tilde{q}, \tilde{p}]$, а именно:

$$\begin{aligned} (\tilde{q}, A^Tu - c + \tilde{q}) &\leqslant 0 \quad \forall u \geqslant 0, \\ (\tilde{p}, b + \tilde{p} - Ax) &\leqslant 0 \quad \forall x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Эти неравенства непосредственно следуют из (14.5) и того, что $[c - A^Tu, Ax - b] \in K$ при всех $x \geqslant 0$, $u \geqslant 0$.

14.2. Двойственный метод типа Эрроу — Гурвица. Введем обозначения $z = [x, u]$, $T(z) = [A^Tu - c, b - Ax]$. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$z_0 \geqslant 0, \quad z_{t+1} = (z_t - \alpha_t T(\bar{z}_t))^+; \tag{14.9}$$
$$\bar{z}_0 \geqslant 0, \quad \bar{z}_{t+1} = (z_{t+1} - \alpha_{t+1} T(\bar{z}_t))^+. \tag{14.10}$$

Этот процесс представляет собой модификацию метода Эрроу — Гурвица отыскания седловых точек [95]. В несколько более общем виде процесс (14.9), (14.10) был предложен в [70] для нахождения седловых точек у гладких выпукло-вогнутых функций.

Характер сходимости процесса (14.9), (14.10) в случае, когда $F(x, u)$ не имеет седловых точек, устанавливает

Теорема 14.1. *Пусть последовательность шаговых параметров* $\{\alpha_t\}$ *в соотношениях* (14.9), (14.10) *удовлет-*

воряет условиям:

$$\{\alpha_t > 0\}, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^2 = +\infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^3 < +\infty. \tag{14.11}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} |z_t - \widetilde{M}\times\widetilde{M}^*| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |\bar{z}_t - \widetilde{M}\times\widetilde{M}^*| = 0.$$

Доказательство. Для произвольных фиксированных $\theta \in \mathbf{N}$ и $\tilde{z} = [\tilde{x}, \tilde{u}] \in \widetilde{M}\times\widetilde{M}^*$ определим вспомогательную функцию $V(z, t)$ по правилу

$$V(z, \theta) = \|z - \tilde{z}\|^2,$$

$$V(z, t) = \left\| z - \tilde{z} - \sum_{\tau=\theta}^{t-1} \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}] \right\|^2 \quad \forall t > \theta.$$

Функция $V(z, t)$ удовлетворяет неравенству

$$V(z_{t+1}, t+1) \leqslant V(z_\theta, \theta) + \alpha_\theta \|z_\theta - \bar{z}_{\theta-1}\|^2 + \\ + \varkappa \sum_{\tau=\theta}^{t} \alpha_\tau^3 - \sum_{\tau=\theta}^{t-1} (1 - 3\alpha_\tau \nu - \alpha_{\tau+1}\nu) \|z_{\tau+1} - \bar{z}_\tau\|^2 - \\ - \sum_{\tau=\theta}^{t} (1 - \alpha_\tau \nu) \|z_\tau + \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}] - \bar{z}_\tau\|^2 \quad \forall t \geqslant \theta. \tag{14.12}$$

Здесь $\varkappa = \nu \|[\tilde{q}, \tilde{p}]\|^2$, $\nu = \|A\| = \|A^T\|$. Чтобы показать справедливость (14.12), воспользуемся известным свойством проекции на выпуклое множество (в данном случае на $\mathbf{R}_+^{n+m}$):

$$(z - z^+, w - z^+) \leqslant 0 \quad \forall w \geqslant 0. \tag{14.13}$$

Это свойство можно также записать в виде $\|w - z^+\|^2 \leqslant \leqslant \|w - z\|^2 - \|z - z^+\|^2 \quad \forall w \geqslant 0$. Полагая здесь $z = z_t - - \alpha_t T(\bar{z}_t)$ и $w = \tilde{z} + \sum_{\tau=\theta}^{t} \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}]$, получаем

$$V(z_{t+1}, t+1) \leqslant V(z_t, t) - \|z_t + \alpha_t [\tilde{q}, \tilde{p}] - z_{t+1}\|^2 - \\ - 2\alpha_t \left(T(\bar{z}_t) + [\tilde{q}, \tilde{p}], z_{t+1} - \tilde{z} - \sum_{\tau=\theta}^{t} \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}] \right) = \\ = V(z_t, t) - \|z_{t+1} - z_t\|^2 - \|\bar{z}_t - z_t - \alpha_t [\tilde{q}, \tilde{p}]\|^2 + \\ + 2(z_t - \alpha_t T(\bar{z}_{t-1}) - \bar{z}_t, z_{t+1} - \bar{z}_t) - \\ - 2\alpha_t (T(\bar{z}_t) - T(\bar{z}_{t-1}), z_{t+1} - \bar{z}_t) - \\ - 2\alpha_t \left(T(\bar{z}_t) + [\tilde{q}, \tilde{p}], \bar{z}_t - \tilde{z} - \sum_{\tau=\theta}^{t} \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}] \right). \tag{14.14}$$

Из условий оптимальности для задач (14.3), (14.4) и (14.6), (14.7) следует

$$\left(T(\bar{z}_t) + [\tilde{q}, \tilde{p}],\ \bar{z}_t - \tilde{z} - \sum_{\tau=\theta}^{t} \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}]\right) \geqslant 0.$$

Полагая в (14.13) $z = z_t - \alpha_t T(\bar{z}_{t-1})$ и $w = z_{t+1}$, приходим к неравенству $(z_t - \alpha_t T(\bar{z}_{t-1}) - \bar{z}_t,\ z_{t+1} - \bar{z}_t) \leqslant 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} &-2\alpha_t\left(T(\bar{z}_t) - T(\bar{z}_{t-1}), z_{t+1} - \bar{z}_t\right) \leqslant \\ &\leqslant 2\alpha_t \nu \|\bar{z}_t - \bar{z}_{t-1}\| \cdot \|z_{t+1} - \bar{z}_t\| \leqslant 2\alpha_t \nu \left(\|z_t - \bar{z}_{t-1}\| + \right. \\ &\left. + \|\bar{z}_t - z_t - \alpha_t [\tilde{q}, \tilde{p}]\| + \alpha_t \|[\tilde{q}, \tilde{p}]\|\right) \|z_{t+1} - \bar{z}_t\| \leqslant \\ &\leqslant \alpha_t \nu \left(\|z_t - \bar{z}_{t-1}\|^2 + \|\bar{z}_t - z_t - \alpha_t [\tilde{q}, \tilde{p}]\|^2 + \right. \\ &\left. + \alpha_t^2 \|[\tilde{q}, \tilde{p}]\|^2\right) + 3\alpha_t \nu \|z_{t+1} - \bar{z}_t\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому из (14.14) имеем

$$\begin{aligned} &V(z_{t+1}, t+1) \leqslant V(z_t, t) - (1 - 3\alpha_t \nu) \|z_{t+1} - \bar{z}_t\|^2 - \\ &- (1 - \alpha_t \nu) \|z_t + \alpha_t [\tilde{q}, \tilde{p}] - \bar{z}_t\|^2 + \varkappa \alpha_t^3 + \alpha_t \nu \|z_t - \bar{z}_{t-1}\|^2. \end{aligned}$$

Неравенство (14.12) получается отсюда обратной рекурсией по t.

Следствием неравенства (14.12) и предположений (14.11) являются ограниченность последовательности $\{V(z_t, t)\}$ и конечность сумм $S_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \|z_t + \alpha_t [\tilde{q}, \tilde{p}] - \bar{z}_t\|^2$, $S_2 = \sum_{t=0}^{\infty} \|z_{t+1} - \bar{z}_t\|^2$. Поэтому в $\{z_t\}$ существует такая подпоследовательность $\{z_{t_s}\}$ для которой

$$\lim_{s\to\infty} \left(z_{t_s} - \tilde{z} - \sum_{\tau=\theta}^{t_s - 1} \alpha_\tau [\tilde{q}, \tilde{p}]\right) = \hat{z}, \tag{14.15}$$

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_{t_s}^{-1} \|z_{t_s} + \alpha_{t_s} [\tilde{q}, \tilde{p}] - \bar{z}_{t_s}\| = 0, \tag{14.16}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|z_{t+1} - \bar{z}_t\| = 0. \tag{14.17}$$

Выделенная подпоследовательность сходится (по расстоянию) к множеству $\tilde{M} \times \tilde{M}^*$. Чтобы показать это, достаточно (см., например, [38]) установить, что

$$\begin{gathered} \lim_{s\to\infty} (Ax_{t_s} - b - \tilde{p})^+ = 0, \quad \lim_{s\to\infty} (c - \tilde{q} - A^T u_{t_s})^+ = 0, \\ \lim_{s\to\infty} \{(c - \tilde{q}, x_{t_s}) - (b + \tilde{p}, u_{t_s})\} = 0. \end{gathered} \tag{14.18}$$

Первые два соотношения с очевидностью следуют из формул процесса (14.9), (14.10) и установленных свойств (14.15), (14.16). Обозначим, далее, $I(t)=\{i\in \mathbf{N}_n:\ \bar{x}_t^i>0\}$, $J(t)=\{j\in \mathbf{N}_m:\ \bar{u}_t^j>0\}$, $a_{j.}\ (j\in \mathbf{N}_m)$ — строки матрицы A, $a_{.i}\ (i\in \mathbf{N}_n)$ — ее столбцы. В силу (14.9), (14.10)

$$\alpha_t^{-1}\left(\bar{u}_t^j-\alpha_t\tilde{p}_j-u_t^j\right)=\left(a_{j.},x_{t-1}\right)-b_j-\tilde{p}_j\quad \forall j\in J(t),$$
$$\alpha_t^{-1}\left(\bar{x}_t^i-\alpha_t\tilde{q}_i-x_t^i\right)=c_i-\tilde{q}_i-\left(a_{.i},\bar{u}_{t-1}\right)\quad \forall i\in I(t).$$

Для вывода третьего соотношения разложим в сумму выражение

$$\left(c-\tilde{q},\bar{x}_{t_s}\right)-\left(b+\tilde{p},\bar{u}_{t_s}\right)=\left(c-\tilde{q}-A^T\bar{u}_{t_s},\bar{x}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{q}\right)-\left(b+\tilde{p}-A\bar{x}_{t_s},\bar{u}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{p}\right)-$$
$$-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\left[\left(\tilde{q},A^T\bar{u}_{t_s}-c+\tilde{q}\right)+\left(\tilde{p},b+\tilde{p}-A\bar{x}_{t_s}\right)\right].$$

Ввиду неравенства (14.8) последнее слагаемое здесь неотрицательно. Поэтому (см. также (14.15)—(14.17))

$$0\geqslant\lim_{s\to\infty}\left\{\left(c-\tilde{q},x_{t_s}\right)-\left(b+\tilde{p},u_{t_s}\right)\right\}=$$
$$=\lim_{s\to\infty}\left\{\left(c-\tilde{q},\bar{x}_{t_s}\right)-\left(b+\tilde{p},\bar{u}_{t_s}\right)\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\lim_{s\to\infty}\left\{\left(c-\tilde{q}-A^T\bar{u}_{t_s-1},\bar{x}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{q}\right)-\left(b+\tilde{p}-A\bar{x}_{t_s-1},\bar{u}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{p}\right)\right\}.$$

А поскольку при достаточно больших t_s из неравенств

$$\bar{x}_{t_s}^i\neq\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{q}_i,\quad \bar{u}_{t_s}^j\neq\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{p}_j$$

следуют, очевидно, включения $i\in I(t_s)$, $j\in J(t_s)$, то

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\left(c-\tilde{q}-A^T\bar{u}_{t_s-1},\bar{x}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{q}\right)-\right.$$

$$-\left(b+\tilde{p}-A\bar{x}_{t_s-1}, \bar{u}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{p}\right)\Bigg\}=$$

$$=\lim_{s\to\infty}\alpha_{t_s}^{-1}\Bigg\{\left(\bar{x}_{t_s}-\alpha_{t_s}\tilde{q}-x_{t_s}, \bar{x}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{q}\right)-$$

$$-\left(\bar{u}_{t_s}-\alpha_{t_s}\tilde{p}-u_{t_s}, \bar{u}_{t_s}-\sum_{\tau=\theta}^{t_s-1}\alpha_\tau\tilde{p}\right)\Bigg\}=0.$$

Совместно с предыдущим это и доказывает соотношение (14.18).

Итак, $\{z_{t_s}\}$ сходится к $\tilde{M}\times\tilde{M}^*$. Поэтому для произвольного $\varepsilon>0$ найдутся такие $t_\varepsilon\in\mathbf{N}$ и $z_\varepsilon\in\tilde{M}\times\tilde{M}^*$, что $\|z_{t_\varepsilon}-z_\varepsilon\|<\varepsilon$. Кроме того, t_ε можно считать столь большим, что $\alpha_{t_\varepsilon}\|z_{t_\varepsilon}-\bar{z}_{t_\varepsilon-1}\|^2<\varepsilon$ и $\varkappa\sum_{t=t_\varepsilon}^{\infty}\alpha_t^3<\varepsilon$ (см. (14.11)). Полагая теперь в (14.12) $\theta=t_\varepsilon$ и $\tilde{z}=z_\varepsilon$, приходим к неравенствам

$$|z_t-\tilde{M}\times\tilde{M}^*|\leqslant V(z_t,t)^{1/2}<(\varepsilon^2+2\varepsilon)^{1/2}\quad\forall t>t_\varepsilon.$$

Тем самым установлена сходимость последовательности $\{z_t\}$ к множеству $\tilde{M}\times\tilde{M}^*$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае разрешимости задач (14.1), (14.2) сходимость процесса (14.9), (14.10) гарантируется условием [70]

$$\alpha_t\equiv\bar{\alpha}\quad\forall t\in\mathbf{N},\qquad 0<\bar{\alpha}<(3\nu)^{-1}.$$

14.3. Регуляризированный двойственный метод. Соотнесем с исходной задачей расширенную функцию Лагранжа

$$F_\mu(x,u)=$$
$$=(c,x)-\frac{1}{2\mu}\|(u+\mu(Ax-b))^+\|^2-\frac{1}{2\mu}\|u\|^2,\qquad \mu>0, \tag{14.19}$$

и рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$[x_0,u_0]\geqslant 0,\qquad \alpha>0;$$
$$x_{t+1}=\arg\max_{x\geqslant 0}\left\{\alpha F_\mu(x,u_t)-\frac{1}{2}\|x-x_t\|^2\right\}, \tag{14.20}$$
$$u_{t+1}=(u_t+\mu(Ax_{t+1}-b))^+,\quad t=0,1,\ldots$$

Здесь на каждой итерации ищется точный максимум функции $\alpha F_\mu(x, u_t)$, регуляризированной квадратичным слагаемым $-\frac{1}{2}\|x - x_t\|^2$. В несколько более общем виде процесс (14.20) был предложен в [1] для решения регулярных задач ВП (и ЛП). Характер сходимости этого процесса в случае, когда исходная задача является несобственной, устанавливает

Теорема 14.2. *При любом $\alpha > 0$ и начальном приближении $[x_0, u_0] \geqslant 0$*

$$\lim_{t\to\infty} |x_t - \widetilde{M}| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |u_t - \widetilde{M}^*| = 0.$$

Доказательство. Обозначим $z = [x, u]$. Для произвольных фиксированных $\theta \in \mathbf{N}$ и $\tilde{z} = [\tilde{x}, \tilde{u}] \in \widetilde{M} \times \widetilde{M}^*$ определим вспомогательную функцию $V(z, t)$ по правилу:

$$V(z, \theta) = \mu\|x - \tilde{x}\|^2 + \alpha\|u - \tilde{u}\|^2,$$

$$V(z, t) = \mu\|x - \tilde{x} - (t - \theta - 1)\tilde{q}\|^2 + \\ + \alpha\|u - \tilde{u} - (t - \theta - 1)\tilde{p}\|^2 \quad \forall t > \theta.$$

Справедливо неравенство:

$$V(z_{t+1}, t + 1) \leqslant V(z_t, t) - \mu\|x_{t+1} - x_t - \alpha\tilde{q}\|^2 - \\ - \alpha\|u_{t+1} - u_t - \mu\tilde{p}\|^2 \quad \forall t \geqslant \theta. \qquad (14.21)$$

В самом деле, из условий оптимальности для внутренней подзадачи процесса (14.20) следует

$$(\alpha c - \alpha A^T u_{t+1} - x_{t+1} + x_t, \ x - x_{t+1}) \leqslant 0 \quad \forall x \geqslant 0. \qquad (14.22)$$

С другой стороны, из (14.6), (14.7) и условий оптимальности для задач (14.3), (14.4) имеем

$$(c - \tilde{q} - A^T(\tilde{u} + (t - \theta)\mu\tilde{p}), \ y - \tilde{x} - (t - \theta)\alpha\tilde{q}) \leqslant 0 \quad \forall y \geqslant 0. \qquad (14.23)$$

Умножим (14.23) на $\alpha > 0$ и сложим с (14.22); результат умножим на $\mu > 0$. Полагая $x = \tilde{x} + (t - \theta)\alpha\tilde{q}$, $y = x_{t+1}$, получим

$$\mu(x_{t+1} - x_t - \alpha\tilde{q}, \ \tilde{x} + (t - \theta)\alpha\tilde{q} - x_{t+1}) - \\ - \alpha\mu(u_{t+1} - \tilde{u} - (t - \theta)\mu\tilde{p}, \ A(\tilde{x} + (t - \theta)\alpha\tilde{q} - x_{t+1})) \leqslant 0. \qquad (14.24)$$

Отдельно преобразуем выражение

$$\mu(u_{t+1} - \tilde{u} - (t - \theta)\mu\tilde{p}, \ A(\tilde{x} + (t - \theta)\alpha\tilde{q}) - Ax_{t+1}) \leqslant \\ \leqslant \mu(u_{t+1} - \tilde{u} - (t - \theta)\mu\tilde{p}, \ b + \tilde{p} - Ax_{t+1}) =$$

$$= (u_{t+1} - \tilde{u} - (t-\theta)\mu\tilde{p},\ u_t - (u_t + \mu(Ax_{t+1} - b)) + \mu\tilde{p}) \leqslant$$
$$\leqslant (u_{t+1} - \tilde{u} - (t-\theta)\mu\tilde{p},\ u_t - u_{t+1} + \mu\tilde{p}).$$

С учетом этого из (14.24) окончательно имеем

$$\mu(x_{t+1} - x_t - \alpha\tilde{q},\ \tilde{x} + (t-\theta)\alpha\tilde{q} - x_{t+1}) -$$
$$- \alpha(u_{t+1} - \tilde{u} - (t-\theta)\mu\tilde{p},\ u_t + \mu\tilde{p} - u_{t+1}) \leqslant 0.$$

Полученное соотношение является эквивалентной записью неравенства (14.21).

Следствием (14.21) является, очевидно, ограниченность последовательности $\{V(z_t,\ t)\}$. Кроме того, из условий оптимальности (14.22) и формул (14.20) заключаем (см. [36]), что

$$x_{t+1} \in \operatorname{Arg\,max} \{(c + \alpha^{-1}(x_t - x_{t+1}),\ x):$$
$$Ax \leqslant b + \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t),\ x \geqslant 0\}, \tag{14.25}$$

$$u_{t+1} \in \operatorname{Arg\,min} \{(b + \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t),\ u):$$
$$A^T u \geqslant c + \alpha^{-1}(x_t - x_{t+1}),\ u \geqslant 0\}. \tag{14.26}$$

Отсюда и из (14.8)

$$(c - \tilde{q},\ x_{t+1}) - (b + \tilde{p},\ u_{t+1}) =$$
$$= (c + \alpha^{-1}(x_t - x_{t+1}) - A^T u_{t+1},\ x_{t+1} - (t-\theta)\alpha\tilde{q}) -$$
$$- (b + \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t) - Ax_{t+1},\ u_{t+1} - (t-\theta)\mu\tilde{p}) +$$
$$+ (\alpha^{-1}(x_{t+1} - x_t) - \tilde{q},\ x_{t+1} - (t-\theta)\alpha\tilde{q}) -$$
$$- (\tilde{p} - \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t),\ u_{t+1} - (t-\theta)\mu\tilde{p}) +$$
$$+ (c - \tilde{q} - A^T u_{t+1},\ (t-\theta)\alpha\tilde{q}) - (b + \tilde{p} - Ax_{t+1},\ (t-\theta)\mu\tilde{p}) \geqslant$$
$$\geqslant (\alpha^{-1}(x_{t+1} - x_t) - \tilde{q},\ x_{t+1} - (t-\theta)\alpha\tilde{q}) -$$
$$- (\tilde{p} - \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t),\ u_{t+1} - (t-\theta)\mu\tilde{p}).$$

Переходя в обеих частях полученного соотношения к пределу (по $t \to \infty$), имеем $\varliminf_{t\to\infty} \{(c - \tilde{q}, x_t) - (b + \tilde{p}, u_t)\} \geqslant 0$. А так как из (14.25), (14.26) следует $\lim_{t\to\infty} (Ax_t - b - \tilde{p})^+ = 0$, $\lim_{t\to\infty} (c - \tilde{q} - A^T u_t)^+ = 0$, то тем самым сходимость последовательностей $\{x_t\}$ и $\{u_t\}$ соответственно к множествам $\tilde{M}$ и $\tilde{M}^*$ доказана.

14.4. Двойственный метод Хестенса — Пауэлла. Пусть теперь исходная задача (14.1) является несобственной 1-го рода (т. е. $\tilde{q} = 0$). Рассмотрим следующий итерационный процесс [113, 108, 115]:

$$
\begin{gathered}
u_0 \geqslant 0, \quad x_t \in \operatorname{Arg}\max_{x \geqslant 0} F_\mu(x, u_t), \\
u_{t+1} = (u_t + \mu(Ax_t - b))^+, \quad t = 0, 1, \ldots;
\end{gathered}
\tag{14.27}
$$

здесь $F_\mu(x, u)$ ($\mu > 0$) — расширенная функция Лагранжа из (14.19). Заметим, что в предположении непустоты допустимой области двойственной задачи точная верхняя грань значений $F_\mu(x, u)$ при любом $u \geqslant 0$ конечна и достигается (см. [107]), потому соотношения (14.27) корректны. Характер сходимости процесса (14.27) устанавливает

Теорема 14.3. *Пусть задача* (14.2) *имеет непустую допустимую область. Тогда при некотором* T

$$x_t \in \widetilde{M}, \quad u_t \in \widetilde{M}^* \quad \forall t > T.$$

Доказательство. Для произвольных фиксированных $\theta \in \mathrm{N}$ и $\tilde{u} \in \widetilde{M}^*$ определим вспомогательную функцию $V(u, t)$ по правилу:

$$V(u, \theta) = \|u - \tilde{u}\|^2,$$

$$V(u, t) = \|u - \tilde{u} - (t - \theta - 1)\mu\tilde{p}\|^2 \quad \forall t > \theta.$$

Из свойства (14.13) следует

$$
\begin{gathered}
V(u_{t+1}, t+1) \leqslant \|u_t + \mu(Ax_t - b) - \tilde{u} - (t - \theta)\mu\tilde{p}\|^2 - \\
- \|u_t + \mu(Ax_t - b) - u_{t+1}\|^2 = V(u_t, t) - \|u_{t+1} - u_t - \mu\tilde{p}\|^2 + \\
+ 2\mu(Ax_t - b - \tilde{p}, u_{t+1} - \tilde{u} - (t - \theta)\mu\tilde{p}).
\end{gathered}
\tag{14.28}
$$

Учитывая, далее, условия оптимальности для задач (14.3), (14.4), получаем неравенство

$$
\begin{gathered}
(Ax_t - b - \tilde{p}, u_{t+1} - \tilde{u} - (t - \theta)\mu\tilde{p}) + \\
+ (c - A^T u_{t+1}, x_t - x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \widetilde{M},
\end{gathered}
$$

а учитывая условия оптимальности для внутренних подзадач процесса,— неравенство

$$(c - A^T u_{t+1}, x - x_t) \leqslant 0 \quad \forall x \geqslant 0. \tag{14.29}$$

Поэтому из (14.28) имеем

$$V(u_{t+1}, t+1) \leqslant V(u_t, t) - \|u_{t+1} - u_t - \mu\tilde{p}\|^2. \tag{14.30}$$

Следствием этого неравенства являются ограниченность последовательности $\{V(u_t, t)\}$ и сходимость к нулю последовательности $\{u_{t+1} - u_t - \mu\tilde{p}\}$. Вместе с тем, из условий (14.29) и формул (14.27) заключаем, что

$$x_t \in \operatorname{Arg}\max\{(c,\ x):\ Ax \leqslant b + \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t),\quad x \geqslant 0\},$$
$$u_{t+1} \in \operatorname{Arg}\min\{(b + \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t),\ u):\ A^T u \geqslant c,\quad u \geqslant 0\}.$$

Но поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} \mu^{-1}(u_{t+1} - u_t) = \tilde{p}$, то отсюда следует (см., например, [1]) существование такого T, что $u_t \in \tilde{M}^*$ при всех $t > T$. Учитывая это в неравенстве (14.30), приходим к равенству

$$\|u_{t+1} - u_t - \mu\tilde{p}\| = 0 \quad \forall t > T;$$

отсюда следует требуемое $x_t \in \tilde{M}$ $\forall t > T$. Теорема доказана.

Отметим, что конечность процесса (14.27) обеспечивается точным решением внутренних подзадач максимизации; при их приближенном решении следует ориентироваться лишь на асимптотическую сходимость.

14.5. Субградиентный двойственный метод. Пусть теперь исходная задача имеет вид

$$\max\{(c,\ x):\ Ax \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant d\}.$$

Двойственную к ней задачу запишем в виде

$$\min\{(b,\ u) + ((c - A^T u)^+,\ d):\ u \geqslant 0\}$$

(см., например, [36]). Очевидно, что исходная задача либо разрешима (если система ее ограничений совместна), либо — автоматически несобственная 1-го рода.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{gathered} u_0 \geqslant 0, \quad z_t \in \operatorname{Arg}\max_{0 \leqslant x \leqslant d} (c - A^T u_t, x) \\ u_{t+1} = (u_t + \alpha_t(Az_t - b))^+, \quad t = 0, 1, \ldots \end{gathered} \tag{14.31}$$

Процессы типа (14.31) в применении к разрешимым задачам ЛП исследовались в [39, 94]. В общем случае справедлива

Теорема 14.4. *Пусть в соотношениях* (14.31) *последовательность шаговых параметров* $\{\alpha_t\}$ *удовлетворяет условиям*

$$\{\alpha_t > 0\}, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t = +\infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^2 < +\infty. \tag{14.32}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \left| \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau\right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau z_\tau - \tilde{M} \right| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} |u_t - \tilde{M}^*| = 0,$$

Здесь

$$\tilde{M} = \operatorname{Arg\,max}\{(c, x) \colon Ax \leqslant b + \tilde{p},\ 0 \leqslant x \leqslant d\}, \quad (14.33)$$

$$\tilde{M}^* = \operatorname{Arg\,min}\{(b + \tilde{p}, u) + ((c - A^T u)^+, d) \colon u \geqslant 0\},$$

$$\tilde{p} = \arg\min\{\|p\|^2 \colon \{0 \leqslant x \leqslant d \colon Ax \leqslant b + p\} \neq \varnothing\}.$$

Доказательство. Определение $\tilde{p}$ может быть записано в эквивалентном виде:

$$\{\tilde{p}\} \times M = \operatorname{Arg\,min}\{\|p\|^2 \colon -p + Ax \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant d\},$$

где M — допустимое множество задачи (14.33). Из условий оптимальности для выписанной задачи квадратичного программирования получаем

$$\tilde{p} \geqslant 0,\ (x, (A^T\tilde{p})^+) = (d - x, (-A^T\tilde{p})^+) = 0,$$
$$(\tilde{p}, Ax - b - \tilde{p}) = 0 \quad \forall x \in M.$$

Отсюда, так же, как и в п. 14.1,

$$\tilde{M}^* + \alpha\tilde{p} \subset \tilde{M}^* \quad \forall \alpha \geqslant 0. \quad (14.34)$$

Далее, зададим произвольные $\theta \in \mathbf{N}$, $\tilde{u} \in \tilde{M}^*$ и определим вспомогательную функцию $V(u, t)$ по следующему правилу:

$$V(u, \theta) = \|u - \tilde{u}\|^2,$$
$$V(u, t) = \left\| u - \tilde{u} - \sum_{\tau=\theta}^{t-1} \alpha_\tau \tilde{p} \right\|^2 \quad \forall t > \theta.$$

Справедливо неравенство

$$V(u_{t+1}, t+1) \leqslant V(u_t, t) + \varkappa\alpha_t^2 + 2\alpha_t(\tilde{v} - v(u_t)) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant V(u_\theta, \theta) + \varkappa \sum_{\tau=\theta}^{t} \alpha_\tau^2 + 2\sum_{\tau=\theta}^{t} (\tilde{v} - v(u_\tau)); \quad (14.35)$$

здесь $\varkappa = \max\{\|Ax - b - \tilde{p}\|^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant d\}$, $v(u) = (b + \tilde{p}, u) + ((c - A^T u)^+, d)$, $\tilde{v}$ — оптимальное значение задачи (14.33). Неравенство (14.35) есть тривиальное следствие формул (14.31) и того, что $b + \tilde{p} - Az_t \in \partial v(u_t)$ при всех $t \in \mathbf{N}$ [94].

Следствием (14.35) и предположений (14.32) является конечность суммы $S = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t (v(u_t) - \tilde{v})$, а значит, и существование такой подпоследовательности $\{u_{t_s}\}$, что

$\{v(u_{t_s})\} \to \tilde{v}$. Опираясь на это, покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\theta_\varepsilon \in \mathbf{N}$, $u_\varepsilon \in \tilde{M}^*$, для которых

$$\left\| u_t - u_\varepsilon - \sum_{\tau=\theta_\varepsilon}^{t} \alpha_\tau \tilde{p} \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant \theta_\varepsilon. \tag{14.36}$$

Ввиду (14.34) это будет означать сходимость $\{u_t\}$ к $\tilde{M}^*$.

Сходимость $\{u_{t_s}\}$ к $\tilde{M}^*$ по функционалу $v(u)$, который является выпуклым и кусочно-линейным, влечет за собой, очевидно, и сходимость по расстоянию. Поэтому найдутся такие $\theta_\varepsilon \in \mathbf{N}$, $u_\varepsilon \in \tilde{M}^*$, что

$$\left\| u_{\theta_\varepsilon} - u_\varepsilon \right\| < \varepsilon / \sqrt{2}. \tag{14.37}$$

При этом θ_ε можно считать столь большим, что (см. (14.32))

$$\sum_{\tau=\theta_\varepsilon}^{\infty} \alpha_\tau^2 < \frac{1}{2\varkappa} \varepsilon^2. \tag{14.38}$$

Тогда неравенство (14.36) будет являться простым следствием соотношений (14.35) и (14.37), (14.38).

Итак, $\{u_t\}$ сходится к $\tilde{M}^*$, причем последовательность $\{V(u_t, t)\}$ ограничена. Пусть, далее, $\hat{u}$ — некоторая предельная точка последовательности $\left\{ u_t - \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \tilde{p} \right\}$; покажем, что она единственна, т. е.

$$\hat{u} = \lim_{t \to 0} \left(u_t - \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \tilde{p} \right). \tag{14.39}$$

В самом деле, пусть (для определенности) $\hat{u} = \lim_{s \to \infty} \left(u_{t_s} - \sum_{\tau=0}^{t_s} \alpha_\tau \tilde{p} \right)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется, следовательно, такой (сколь угодно большой) номер θ_ε, что

$$\left\| u_{\theta_\varepsilon} - \hat{u} - \sum_{\tau=0}^{\theta_\varepsilon} \alpha_\tau \tilde{p} \right\| < \frac{1}{3} \varepsilon. \tag{14.40}$$

Вместе с тем, согласно (14.36) найдутся такие $u_\varepsilon \in \tilde{M}^*$,

$\theta'_\varepsilon \in \mathbf{N}$, для которых

$$\left\| u_t - u_\varepsilon - \sum_{\tau=\theta'_\varepsilon}^{t} \alpha_\tau \tilde{p} \right\| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall t \geqslant \theta'_\varepsilon. \qquad (14.41)$$

Полагаем $\theta_\varepsilon > \theta'_\varepsilon$ в (14.40), (14.41). Получаем

$$\left\| u_t - \hat{u} - \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \tilde{p} \right\| \leqslant \left\| u_t - u_\varepsilon - \sum_{\tau=\theta_\varepsilon}^{t} \alpha_\tau \tilde{p} \right\| + \\ + \left\| \hat{u} + \sum_{\tau=0}^{\theta_\varepsilon - 1} \alpha_\tau \tilde{p} - u_{\theta_\varepsilon} \right\| + \| u_{\theta_\varepsilon} - u_\varepsilon \| < \varepsilon \quad \forall t > \theta_\varepsilon.$$

Тем самым соотношение (14.39) доказано. Из него, в частности, следует

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \right)^{-1} u_{t+1} = \tilde{p}. \qquad (14.42)$$

Отсюда и из (14.31) для последовательности $x_t = \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau z_\tau$ имеем

$$\lim_{t\to\infty} (Ax_t - b)^+ = \lim_{t\to\infty} \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau (Az_\tau - b) \leqslant \\ \leqslant \lim_{t\to\infty} \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} (u_{\tau+1} - u_\tau) = \tilde{p}. \qquad (14.43)$$

Соотношения (14.43) на самом деле можно уточнить. Обозначим $J = \{j \in \mathbf{N}_m \colon |\hat{u}_j| + |\tilde{p}_j| > 0\}$, $a_j (j \in \mathbf{N}_m)$ — строки матрицы A. В силу (14.39) существует такое T, что $u_t^j > 0$ при всех $t > T$, $j \in J$. Поэтому при $t > T$, $j \in J$

$$(a_j, x_t) - b_j = \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \right)^{-1} \left\{ \sum_{\tau=0}^{T} \alpha_\tau ((a_j, z_\tau) - b_j) + u_{t+1} - u_{T+1} \right\},$$

откуда ввиду (14.42)

$$\lim_{t\to\infty} (a_j, x_t) = b_j + \tilde{p}_j \quad \forall j \in J. \qquad (14.44)$$

Далее, из конечности величины S и предположений (14.32) вытекает

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau \right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau v(u_\tau) = \tilde{v}. \qquad (14.45)$$

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся в силу (14.36) и (14.39) такие $\theta_\varepsilon \in \mathbf{N}$, $u_\varepsilon \in \widetilde{M}^*$, что

$$\left\| \widehat{u} + \sum_{\tau=0}^{\theta_\varepsilon - 1} \alpha_\tau \widetilde{p} - u_\varepsilon \right\| < \varepsilon,$$

$$\left\| u_t - u_\varepsilon - \sum_{\tau=\theta_\varepsilon}^{t} \alpha_\tau \widetilde{p} \right\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant \theta_\varepsilon.$$

Отсюда и из (14.31) имеем

$$\begin{aligned}(c, x_t) &= \\ &= \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau\right)^{-1} \left(\left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau v(u_\tau) \right) + \sum_{\tau=0}^{\theta_\varepsilon - 1} \alpha_\tau (u_\tau, Az_\tau - b - \widetilde{p}) \right) + \\ &+ \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau\right)^{-1} \sum_{\tau=\theta_\varepsilon}^{t} \alpha_\tau \left(\left(u_\tau - u_\varepsilon - \sum_{s=\theta_\varepsilon}^{\tau} \alpha_s \widetilde{p}, Az_\tau - b - \widetilde{p} \right) + \right. \\ &+ \left(u_\varepsilon - \widehat{u} - \sum_{s=0}^{\theta_\varepsilon - 1} \alpha_s \widetilde{p}, Az_\tau - b - \widetilde{p} \right) + (\widehat{u}, Az_\tau - b - \widetilde{p}) + \\ &+ \left. \sum_{s=0}^{\tau} \alpha_s (\widetilde{p}, Az_\tau - b - \widetilde{p}) \right) \geqslant \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau\right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau v(u_\tau) + \\ &+ \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau\right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{\theta_\varepsilon - 1} \alpha_\tau (u_\tau - \widehat{u}, Az_\tau - b - \widetilde{p}) + \\ &+ (\widehat{u}, Ax_t - b - \widetilde{p}) - 2\varepsilon \varkappa^{1/2} \quad \forall t > \theta_\varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь также использовано неравенство $(\tilde{p}, Az_\tau - b - \tilde{p}) \geqslant \geqslant 0$, вытекающее из (14.13), и определение $\tilde{p}$.

Переходя в полученном неравенстве к пределу (по $t \to \infty$), с учетом (14.44), (14.45) получаем $\varliminf_{t\to\infty} (c, x_t) \geqslant \widetilde{v} - 2\varepsilon\varkappa^{1/2}$, или, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, $\varliminf_{t\to\infty} (c, x_t) \geqslant \widetilde{v}$. Совместно с (14.43) это соотношение доказывает сходимость к $\widetilde{M}$ последовательности $\left\{ x_t = \left(\sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau\right)^{-1} \sum_{\tau=0}^{t} \alpha_\tau z_\tau \right\}$.

§ 15. Регуляризирующий алгоритм коррекции несобственных задач ЛП 1-го рода

В данном параграфе рассматривается способ коррекции несобственной задачи ЛП 1-го рода, основанный на применении регуляризированной функции Лагранжа. Несобственной задаче ставится в соответствие определенная аппроксимирующая задача, приводится ряд оценок, характеризующих связь между данной задачей и проблемой нахождения седловых точек функции Лагранжа и на основе этих оценок строится конкретная процедура итеративной регуляризации.

15.1. Аппроксимирующая задача и ее свойства. Рассмотрим несобственную задачу линейного программирования 1-го рода в форме

$$\min\{(c,\ x):\ Ax \leqslant b\}, \tag{15.1}$$

$x \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, A — матрица размера $m \times n$. Согласно классификации несобственных задач ЛП допустимое множество $U = \{u:\ A^{\mathrm{T}} u = c,\ u \leqslant 0\}$ двойственной к (15.1) задачи непусто, тогда как система ограничений исходной задачи (15.1) не является совместной.

В качестве задачи, аппроксимирующей несобственную постановку (15.1), возьмем следующую:

$$\min\{(c,\ x):\ Ax \leqslant b + \bar{p}\}, \tag{15.2}$$

где $\bar{p}$ — минимальный по норме элемент множества $K_b = \{p \in \mathbf{R}^m:\ \{x:\ Ax \leqslant b + p\} \neq \varnothing\}$. Нетрудно видеть, что $\bar{p} = (A\tilde{x} - b)^+$, где $\tilde{x} \in \operatorname{Arg}\min\limits_x \{\varphi(x):\ = \|(Ax - b)^+\|^2\}$. Напомним, что из условия $U \neq \varnothing$ вытекает разрешимость задачи (15.2).

Отметим некоторые свойства вектора $\bar{p}$. Так как $\bar{p}$ является проекцией точки $0 \in \mathbf{R}^m$ на выпуклое замкнутое множество K_b, то этот вектор определяется однозначно (хотя множество $\tilde{X} = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi(x)$ может состоять и не из единственной точки). Из равенства $\nabla\varphi(\tilde{x}) = 0$ вытекает

$$A^{\mathrm{T}} \bar{p} = 0. \tag{15.3}$$

Далее, из определения $\bar{p}$ и очевидного факта $\gamma^+\gamma = \gamma^{+2}$ получаем, что $(\bar{p},\ A\tilde{x} - b - \bar{p}) = 0$, откуда с учетом (15.3) следует

$$(\bar{p},\ b + \bar{p}) = 0. \tag{15.4}$$

Но тогда в силу (15.3) имеем $(\bar{p}, Ax - b - \bar{p}) = 0\ \forall x \in \mathbf{R}^n$, и, следовательно,

$$(\bar{p}, Ax - b) = \|\bar{p}\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{15.5}$$

Из неравенства $\frac{1}{2}\ \left((Ax - b)^+ - \bar{p}, (Ax - b)^+ - \bar{p}\right) \geqslant 0$ и определения $\bar{p}$ вытекает также, что

$$(\bar{p}, (Ax-b)^+) \leqslant \|(Ax-b)^+\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{15.6}$$

Двойственной для (15.2) является задача

$$\max\{(b+\bar{p},\ u):\ A^T u = c,\ u \leqslant 0\}. \tag{15.7}$$

Нетрудно заметить, что множество U^* оптимальных решений задачи (15.7) является неограниченным. В самом деле, наряду с $u^* \in U^*$ все точки вида $u_t = u^* - t\bar{p}$ при $t \geqslant 0$ лежат в U^*. Это следует из соотношений (15.3) и (15.4).

15.2. Регуляризованная функция Лагранжа. Введем в рассмотрение задачу нахождения седловых точек функции

$$L_\sigma(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \alpha\|x\|^2 - \beta\|\lambda\|^2$$

в области $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$, где $\sigma = [\alpha, \beta] > 0$; $L(x, \lambda)$ — функция Лагранжа, поставленная в соответствие (15.1):

$$L(x, \lambda) = (c, x) + (\lambda, Ax - b), \qquad \lambda \in \mathbf{R}^m_+.$$

Поскольку задача (15.1) несобственная, то функция $L(x, \lambda)$ не имеет в области $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$ седловых точек. Добавка к $L(x, \lambda)$ «регуляризирующих» слагаемых $\alpha\|x\|^2$ и $-\beta\|\lambda\|^2$ позволяет устранить подобный недостаток.

Функция $L_\sigma(x, \lambda)$ сильно выпукла по x и сильно вогнута по λ. Характерным свойством сильно выпуклых (вогнутых) функций является то, что на любом выпуклом замкнутом множестве из области определения они имеют единственную точку минимума (максимума).

Обозначим $g_\sigma(x) = \max\limits_{\lambda \geqslant 0} L_\sigma(x, \lambda)$, $h_\sigma(\lambda) = \min\limits_x L_\sigma(x, \lambda)$.

Непосредственной проверкой нетрудно установить, что $g_\sigma(x)$ — сильно выпуклая на $\mathbf{R}^n$ функция, в то время как $h_\sigma(\lambda)$ сильно вогнута на $\mathbf{R}^m_+$. Поэтому множества

$$X^\sigma = \operatorname{Arg}\min_x g_\sigma(x), \quad \Lambda^\sigma = \operatorname{Arg}\max_{\lambda \geqslant 0} h_\sigma(\lambda)$$

состоят из единственных точек x^σ и λ^σ соответственно. По известной теореме о минимаксе (см., например, [72]) $g_\sigma(x^\sigma) = h_\sigma(\lambda^\sigma) = L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma)$, т. е. $\{(x^\sigma, \lambda^\sigma)\}$ — единственная седловая точка функции $L_\sigma(x, \lambda)$ в области $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+$ при любом $\sigma > 0$.

Найдем явный вид функций $g_\sigma(x)$ и $h_\sigma(\lambda)$. При фиксированном x функция $L_\sigma(x, \lambda)$ достигает максимума по

$\lambda \geqslant 0$ при $\lambda(x)=\frac{1}{2\beta}(Ax-b)^+$. Это следует из выполнения неравенства $(\nabla_\lambda L_\sigma(x, \lambda(x)), \lambda-\lambda(x)) \leqslant 0 \ \forall \lambda \geqslant 0$ — необходимого и достаточного условия достижения функцией $L_\sigma(x,\lambda)$ максимума по λ на множестве $\mathbf{R}_+^m$ в точке $\lambda(x)$ (x фиксировано). Отсюда

$$g_\sigma(x) = L_\sigma(x, \lambda(x)) = (c, x) + \frac{1}{4\beta}\|(Ax-b)^+\|^2 + \alpha\|x\|^2.$$

Таким же образом, из анализа условия $\nabla_x L_\sigma(x, \lambda) = 0$ находим, что при фиксированном $\lambda \geqslant 0$ функция $L_\sigma(x,\lambda)$ достигает минимума по x в точке $x(\lambda)=\frac{1}{2\alpha}(A^T(-\lambda)-c)$. Поэтому

$$h_\sigma(\lambda) = L_\sigma(x(\lambda), \lambda) = -(b,\lambda) - \frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda)-c\|^2 - \beta\|\lambda\|^2.$$

Заметим, что функция $g = g_\sigma(x)$ является стандартной для метода регуляризации Тихонова [82] некорректно поставленных задач ЛП вида (15.1). Аналогично, $h = h_\sigma(\lambda)$ есть регуляризирующая функция для задачи, двойственной к (15.1). С другой стороны, $g = g_\sigma(x)$ может интерпретироваться как критерий качества решения результирующей задачи, к которой сводится трехэтапная постановка задачи последовательного программирования [32] (лексикографической оптимизации [83]). Первый этап заключается при этом в нахождении множества $\tilde{X} = \operatorname{Arg}\min\limits_x \|(Ax-b)^+\|^2$, второй этап состоит в решении задачи (15.2): $\min\{(c, x): x \in \tilde{X}\}$, и на третьем этапе находится элемент с минимальной нормой из множества X^* оптимальных решений задачи (15.2). Аналогичную интерпретацию может иметь и функция $h = h_\sigma(\lambda)$, но относительно задачи, двойственной к (15.1).

15.3. Случай собственной задачи. Чтобы нагляднее отразить сходство и различие рассматриваемого подхода к анализу собственных задач ЛП и несобственных задач 1-го рода, приведем вначале без вывода взятые из [77] оценки, характеризующие связь между решениями исходной пары двойственных задач и седловой точкой $(x^\sigma, \lambda^\sigma)$ функции $L_\sigma(x, \lambda)$.

Пусть $U \neq \varnothing$, $\bar{p} = 0$. Обозначим через $\tilde{f}$ оптимальное значение задачи (15.1) (или, что в данном случае то же самое, задачи (15.2)), $\tilde{x}_0 = \arg\min\{\|x\|: x \in X^*\}$, $\tilde{u}_0 = \arg\min\{\|u\|: u \in U, (b, u) = \tilde{f}\}$. Справедливы следующие оценки:

$$\tilde{f} - \beta\|\tilde{u}_0\|^2 \leqslant L_\sigma(x^\sigma, \lambda^\sigma) \leqslant \tilde{f} + \alpha\|\tilde{x}_0\|^2$$

для уклонения седлового значения функции $L_\sigma(x, \lambda)$ от $\tilde{f}$;

$$\|(Ax^\sigma - b)^+\| \leqslant \sqrt{\beta} C_0(\alpha, \beta), \tag{15.8}$$

где $C_0(\alpha, \beta) = 2(\alpha\|\tilde{x}_0\|^2 + \beta\|\tilde{u}_0\|^2)^{1/2} \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, — для близости x^σ к допустимой области задачи (15.1);

$$|(c, x^\sigma) - \tilde{f}| \leqslant \max\{\alpha\|\tilde{x}_0\|^2, \sqrt{\beta}\|\tilde{u}_0\| C_0(\alpha, \beta)\} \tag{15.9}$$

для сходимости по целевой функции;

$$\|x^\sigma - \tilde{x}_0\| \leqslant (\beta/\alpha)^{1/2}\|\tilde{u}_0\| \text{ (для достаточно малого } \alpha) \tag{15.10}$$

для сходимости x^σ к $\tilde{x}_0$ (*нормальному решению* (15.1)).

В силу известной симметрии прямой и двойственной задач в линейном программировании выполняются аналогичные соотношения:

$$\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| \leqslant \sqrt{\alpha} C_0(\alpha, \beta) \tag{15.11}$$

для уклонения $-\lambda^\sigma$ от множества U;

$$|(b, -\lambda^\sigma) - \tilde{f}| \leqslant \max\{\beta\|\tilde{u}_0\|^2, \sqrt{\alpha}\|\tilde{x}_0\| C_0(\alpha, \beta)\} \tag{15.12}$$

для сходимости по целевой функции двойственной задачи;

$$\|\lambda^\sigma + \tilde{u}_0\| \leqslant (\alpha/\beta)^{1/2}\|\tilde{x}^0\| \text{ (для достаточно малого } \beta)$$

для сходимости $-\lambda^\sigma$ к $\tilde{u}_0$.

15.4. Сходимость метода регуляризации для несобственных задач ЛП 1-го рода. Покажем теперь, что и в случае несобственной задачи ЛП 1-го рода справедливы оценки, аналогичные (15.8)—(15.10), для сходимости точек минимума x^σ регуляризирующей функции $g = g_\sigma(x)$ к решению аппроксимирующей задачи (15.2).

Теорема 15.1. *Для любого $\sigma > 0$ выполняются соотношения*

$$\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\| \leqslant \sqrt{\beta}\, C(\alpha, \beta), \tag{15.13}$$

$$|(c, x^\sigma) - f^*| \leqslant \max\{\alpha\|x_0^*\|^2, \sqrt{\beta}\,\|u_0^*\|\, C(\alpha, \beta)\}, \tag{15.14}$$

где $C(\alpha, \beta) = 2(\sqrt{\beta}\|u_0^*\| + (\alpha\|x_0^*\|^2 + \beta\|u_0^*\|^2)^{1/2})$, x_0^*, u_0^* — минимальные по норме элементы X^*, U^* — множеств оптимальных решений задач (15.2) *и* (15.7) *соответственно, f^* — оптимальное значение задачи* (15.2).

Доказательство. Из определения векторов x^σ и $\bar{p}$ имеем

$$(c, x^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2 \leqslant g_\sigma(x^\sigma) \leqslant f^* + \frac{1}{4\beta}\|\bar{p}\|^2 + \\ + \alpha\|x_0^*\|^2. \qquad (15.15)$$

Оценим разность $f^* - (c, x^\sigma)$. Получим

$$f^* - (c, x^\sigma) = (c, x_0^* - x^\sigma) = (A^T u_0^*, x_0^* - x^\sigma) = \\ = (u_0^*, A(x_0^* - x^\sigma)) = (u_0^*, Ax_0^* - b - \bar{p}) - (u_0^*, Ax^\sigma - b - \bar{p}).$$

В силу соотношений двойственности между задачами (15.2) и (15.7) $(u_0^*, Ax_0^* - b - \bar{p}) = 0$. Поэтому

$$f^* - (c, x^\sigma) \leqslant \|u_0^*\|\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\|. \qquad (15.16)$$

Поскольку для любых действительных чисел q и r справедливо неравенство $(q - r)^{+2} \leqslant (q^+ - r)^2$, то можем записать

$$\|(Ax - b - \bar{p})^+\|^2 \leqslant \|(Ax - b)^+ - \bar{p}\|^2 = \\ = \|(Ax - b)^+\|^2 - 2(\bar{p}, (Ax - b)^+) + \|\bar{p}\|^2,$$

откуда с учетом (15.5) получим

$$\|(Ax - b - \bar{p})^+\|^2 \leqslant \|(Ax - b)^+\|^2 - \|\bar{p}\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Полагая в последнем неравенстве $x = x^\sigma$ и применяя соотношения (15.15) и (15.16), имеем

$$\frac{1}{4\beta}\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\|^2 \leqslant \frac{1}{4\beta}[\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2 - \|\bar{p}\|^2] \leqslant \\ \leqslant \|u_0^*\|\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\| + \alpha\|x_0^*\|^2. \qquad (15.17)$$

Поэтому

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\| - \sqrt{\beta}\|u_0^*\|\right]^2 - \beta\|u_0^*\|^2 \leqslant \alpha\|x_0^*\|^2,$$

откуда и вытекает оценка (15.13).

Из соотношения (15.15) и определения $\bar{p}$ имеем

$$(c, x^\sigma) - f^* \leqslant \alpha\|x_0^*\|^2 + \frac{1}{4\beta}[\|\bar{p}\|^2 - \|(Ax^\sigma - b)^+\|^2] \leqslant \alpha\|x_0^*\|^2. \qquad (15.18)$$

Согласно (15.16) и (15.13) получим $f^* - (c, x^\sigma) \leqslant \leqslant \sqrt{\beta}\|u_0^*\|C(\alpha, \beta)$, что вместе с (15.18) и дает (15.14).

Следствие 15.1. $|x^\sigma - X^*| \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.

Это утверждение вытекает из (15.13) и (15.18) (см., например, [83]).

Рассмотрим проблему нахождения нормального решения задачи (15.2):

$$\min\{\|x\|^2\colon\ Ax \leqslant b + \bar{p},\ (c, x) \leqslant f^*\}. \tag{15.19}$$

Так как (15.19) представляет собой задачу отыскания проекции $x = 0$ на непустое многогранное множество $X^* \subset \mathbf{R}^n$, то существует единственный элемент x_0^*, являющийся ее решением.

В силу условий оптимальности (см., например, [36]) для задачи квадратичного программирования (15.19) найдутся такие числа $\bar{v}_j \leqslant 0$, $j \in \{0\} \cup \mathbf{N}_m$, что выполняются соотношения

$$2x_0^* = A^T\bar{v} + \bar{v}_0 c,\quad (\bar{v}, Ax_0^* - b - \bar{p}) = 0, \tag{15.20}$$

где $\bar{v} = [\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m]$.

По определению седловой точки $x^\sigma = x(\lambda^\sigma) = \frac{1}{2\alpha}\left(A^T(-\lambda^\sigma) - c\right)$. Следовательно, с учетом (15.20) имеем

$$2(x^\sigma - x_0^*) = \left(|\bar{v}_0| - \frac{1}{\alpha}\right)c - A^T\left(\frac{1}{\alpha}\lambda^\sigma + \bar{v}\right).$$

Отсюда

$$2\|x^\sigma - x_0^*\|^2 = \left(|\bar{v}_0| - \frac{1}{\alpha}\right)(c, x^\sigma - x_0^*) - \left(A^T\left(\frac{1}{\alpha}\lambda^\sigma + \bar{v}\right), x^\sigma - x_0^*\right) =$$
$$= \left(|\bar{v}_0| - \frac{1}{\alpha}\right)[(c, x^\sigma) - f^*] - (\bar{v}, A(x^\sigma - x_0^*)) - \frac{1}{\alpha}(\lambda^\sigma, A(x^\sigma - x_0^*)). \tag{15.21}$$

Оценим сверху величину $-\frac{1}{\alpha}(\lambda^\sigma, A(x^\sigma - x_0^*))$. Из допустимости x_0^* в (15.2) и (15.3), (15.4) следует

$$(\lambda^\sigma, Ax^\sigma - Ax_0^*) =$$
$$= \frac{1}{2\beta}\left((Ax^\sigma - b)^+, Ax^\sigma - b - \bar{p} - (Ax_0^* - b - \bar{p})\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2\beta}\left((Ax^\sigma - b)^+, Ax^\sigma - b - \bar{p}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\beta}\left((Ax^\sigma - b)^+ - \bar{p},\ Ax^\sigma - b - \bar{p}\right) + \frac{1}{2\beta}(\bar{p}, Ax^\sigma - b - \bar{p}) =$$
$$= \frac{1}{2\beta}\left((Ax^\sigma - b)^+ - \bar{p}, Ax^\sigma - b - \bar{p}\right).$$

Применяя далее неравенство $(q^+ - r, q-r) \geqslant (q-r)^{+2}$ $\forall q \in R^1$, $\forall r \in R^1_+$, справедливость которого проверяется непосредственно, получим

$$(\lambda^\sigma, A(x^\sigma - x_0^*)) \geqslant \frac{1}{2\beta} \|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\|^2.$$

Поэтому из (15.21) вытекает

$$2\|x^\sigma - x_0^*\|^2 \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - |\bar{v}_0|\right)(f^* - (c, x^\sigma)) -$$
$$-(\bar{v}, Ax^\sigma - b - \bar{p} - (Ax_0^* - b - \bar{p})) - \frac{1}{2\alpha\beta}\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\|^2.$$

Пусть $\alpha^{-1} > |\bar{v}_0|$. Тогда из последнего неравенства с учетом (15.16), (15.13) и (15.20) имеем

$$2\|x^\sigma - x_0^*\|^2 \leqslant \left[\left(\frac{1}{\alpha} - |\bar{v}_0|\right)\|u_0^*\| + \|\bar{v}\|\right]\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\| -$$
$$- \frac{1}{2\alpha\beta}\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\|^2 \leqslant -\left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha\beta}}\|(Ax^\sigma - b - \bar{p})^+\| -\right.$$
$$\left.- \left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\alpha}\|u_0^*\| + \|\bar{v}\|\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta\left(\frac{1}{\alpha}\|u_0^*\| + \|\bar{v}\|\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}(\|u_0^*\| + \alpha\|\bar{v}\|)^2.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 15.2. *Пусть* $\alpha^{-1} > |\bar{v}_0|$, $\alpha\|\bar{v}\| \leqslant \|u_0^*\|$. *Тогда*

$$\|x^\sigma - x_0^*\| \leqslant \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}\|u_0^*\|. \tag{15.22}$$

Следствие 15.2. *Пусть последовательность* $\{\sigma_k = [\alpha_k, \beta_k]\}$ *удовлетворяет соотношениям:* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} = 0$. *Тогда* $\{x^{\sigma_k}\}$ *сходится к нормальному решению задачи* (15.2).

15.5. Сходимость переменных λ^σ. Рассмотрим некоторые связанные с несобственностью особенности сходимости двойственных переменных λ^σ к решению задачи (15.7). Они будут вытекать из следующих двух теорем.

Теорема 15.3. *Для произвольных* $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$ *справедлива оценка*

$$\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| \leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} D, \tag{15.23}$$

где $D = D(\sigma_0) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Так как $h_\sigma(\lambda^\sigma) \geqslant h_\sigma(\lambda)$ для любых $\lambda \geqslant 0$, то при $\lambda = -u^* \in -U^*$ имеем

$$-(b, \lambda^\sigma) - \frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\|^2 - \beta\|\lambda^\sigma\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant (b, u^*) - \beta\|u^*\|^2 = (b + \bar{p}, u^*) - (\bar{p}, u^*) - \beta\|u^*\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant f^* - \beta\|u^*\|^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\|^2 \leqslant -(b, \lambda^\sigma) - f^* + \beta\|u^*\|^2. \quad (15.24)$$

Выберем произвольно $x^* \in X^*$. По определению $\lambda^\sigma = \lambda(x^\sigma) = \frac{1}{2\beta}(Ax^\sigma - b)^+$. Поэтому с учетом (15.6) имеем

$$-(b, \lambda^\sigma) - f^* = -(b + \bar{p}, \lambda^\sigma) - f^* + (\bar{p}, \lambda^\sigma) \leqslant$$
$$\leqslant -(Ax^*, \lambda^\sigma) - f^* + (\bar{p}, \lambda^\sigma) =$$
$$= (x^*, A^T(-\lambda^\sigma)) - (c, x^*) + \frac{1}{2\beta}(\bar{p}, (Ax^\sigma - b)^+) \leqslant$$
$$\leqslant \|x^*\|\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| + \frac{1}{2\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2.$$

Согласно последнему неравенству и (15.24) получим

$$\frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\|^2 - \|x^*\|\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| =$$
$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| - \sqrt{\alpha}\|x^*\|\right]^2 - \alpha\|x^*\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \beta\|u^*\|^2 + \frac{1}{2\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| \leqslant \alpha\|x^*\| +$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2 + \alpha\beta\|x^*\|^2 + \beta^2\|u^*\|^2\right)^{1/2}. \quad (15.25)$$

Далее, привлекая оценки (15.17) и (15.13), имеем

$$\|(Ax^\sigma - \beta)^+\|^2 \leqslant \|\bar{p}\|^2 + \beta E(\alpha, \beta),$$

где $E(\alpha, \beta) = 4\sqrt{\beta}\|u^*\|C(\alpha, \beta) + 4\alpha\|x^*\|^2$, $C(\alpha, \beta)$ — из (15.13), $E(\alpha, \beta) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. Поэтому для любого $\sigma_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ существует число $H = H(\sigma_0)$ такое, что

$\|(Ax^\sigma - b)^+\| \leqslant H$ $\forall \alpha \leqslant \alpha_0$, $\forall \beta \leqslant \beta_0$. Тогда из (15.25) следует $\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| \leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}(2\sqrt{\alpha}\beta\|x^*\| +$

$$+ \left(2H^2 + \alpha\beta\|x^*\|^2 + \beta^2\|u^*\|^2\right)^{1/2}) \leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} D,$$

где $D = 2\sqrt{\alpha_0}\beta_0\|x^*\| + \left(2H^2 + \alpha_0\beta_0\|x^*\|^2 + \beta_0^2\|u^*\|^2\right)^{1/2}$.

Теорема 15.4. *Пусть* $0 < \sigma \leqslant \sigma_0$ (σ_0 *фиксировано*). *Тогда*

$$|(b + \bar{p}, -\lambda^\sigma) - f^*| \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} D\|x_0^*\|, \sqrt{\beta}\|u_0^*\|C(\alpha, \beta)\right\}, \qquad (15.26)$$

где $C(\alpha, \beta)$ — *из* (15.13), D — *из* (15.23).

Доказательство. Вначале с помощью (15.23) получим оценку

$$-(b + \bar{p}, \lambda^\sigma) - f^* \leqslant (-Ax_0^*, \lambda^\sigma) - (c, x_0^*) \leqslant$$
$$\leqslant \|x_0^*\|\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\| \leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}\|x_0^*\|D. \qquad (15.27)$$

Поскольку

$$g_\sigma(x^\sigma) = (c, x^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2 + \alpha\|x^\sigma\|^2 =$$
$$= (c, x^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2 + \frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\|^2$$

и, соответственно,

$$h_\sigma(\lambda^\sigma) = -(b, \lambda^\sigma) - \frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\|^2 - \beta\|\lambda^\sigma\|^2 =$$
$$= -(b, \lambda^\sigma) - \frac{1}{4\alpha}\|A^T(-\lambda^\sigma) - c\|^2 - \frac{1}{4\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2,$$

то из равенства $g_\sigma(x^\sigma) = h_\sigma(\lambda^\sigma)$ получим

$$(c, x^\sigma) - (b, \lambda^\sigma) = 2g_\sigma(x^\sigma).$$

Из последнего равенства вытекает

$$(b + \bar{p}, \lambda^\sigma) + f^* = (c, x^\sigma) + f^* + (\bar{p}, \lambda^\sigma) - 2g_\sigma(x^\sigma) =$$
$$= f^* - (c, x^\sigma) + (\bar{p}, \lambda^\sigma) - \frac{1}{2\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2 - 2\alpha\|x^\sigma\|^2. \qquad (15.28)$$

В силу (15.6) имеем

$$(\bar{p}, \lambda^\sigma) = \frac{1}{2\beta}(\bar{p}, (Ax^\sigma - b)^+) \leqslant \frac{1}{2\beta}\|(Ax^\sigma - b)^+\|^2.$$

Применяя это неравенство к (15.28), получим $(b+\bar{p},\lambda^\sigma)+$ $+f^*\leqslant f^*-(c,x^\sigma)$, и, окончательно, с учетом теоремы 15.1,

$$(b+\bar{p},\lambda^\sigma)+f^*\leqslant\sqrt{\beta}\,\|u_0^*\|\,C(\alpha,\beta). \tag{15.29}$$

Неравенство (15.29) вместе с (15.27) и доказывает теорему.

Сравним полученные в теоремах 15.3 и 15.4 оценки для несобственных задач ЛП 1-го рода и соответствующие оценки (15.11), (15.12), выведенные для собственных задач. Если для прямых переменных x^σ теоремы 15.1—15.2 утверждают тот же порядок сходимости, что и в собственном случае, то для двойственных переменных λ^σ эта аналогия нарушается. Так, из соотношения (15.12) сходимость λ^σ по функционалу двойственной задачи к $\tilde{f}$ имеет место при независимом стремлении α, β к нулю, тогда как для несобственных задач сходимость $F=-(b+\bar{p},\lambda^\sigma)$ к f^* гарантируется лишь при $\alpha\to0$, $\beta\to0$, $\alpha/\beta\to0$. Из сравнения (15.12) и (15.26) вытекает также и практический прием определения в процессе нахождения $(x^\sigma,\lambda^\sigma)$, является ли (15.1) задачей собственной или несобственной 1-го рода. Для собственной задачи $(c,x^\sigma)\to\tilde{f}$, $(b,-\lambda^\sigma)\to$ $\to\tilde{f}$ при $\sigma\to0$, в то время как для несобственной $(c,x^\sigma)\to$ $\to f^*$, а $(b,\ -\lambda^\sigma)\to+\infty$ при $\sigma\to0$. Последнее вытекает, например, из (15.29), определения λ^σ и (15.5):

$$-(b,\lambda^\sigma)-f^*\geqslant-\sqrt{\beta}\,\|u_0^*\|\,C(\alpha,\beta)+(\bar{p},\lambda^\sigma)=$$
$$=-\sqrt{\beta}\,\|u_0^*\|\,C(\alpha,\beta)+\frac{1}{2\beta}(\bar{p},(Ax^\sigma-b)^+)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2\beta}\|\bar{p}\|^2-\sqrt{\beta}\,\|\bar{u}_0^*\|\,C(\alpha,\beta).$$

15.6. Алгоритм итеративной регуляризации. Применение регуляризирующей функции $g=g_\sigma(x)$ позволяет, как известно [82, 36, 10], построить устойчивый метод решения аппроксимирующих задач (15.2) и в случае, когда последние являются некорректно поставленными, т. е. когда малые изменения исходной информации A, b, c могут повлечь существенное изменение решения (15.2). Однако при практической реализации метода возникают трудности, связанные с нахождением $x^\sigma=\arg\min\limits_x g_\sigma(x)$. Как правило, эти точки отыскивают приближенно, с точностью ε_k при $\sigma=\sigma_k$, применяя определенную процедуру $\mathscr{P}$ безусловной минимизации. Для сходимости такого приближенного метода требуется обычно, чтобы $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, что влечет неограниченный рост числа q_k итераций $\mathscr{P}$. Для преодоления этой трудности чаще всего полагают $q_k = q$ $\forall k$ (например, $q = 1$) и согласуют параметр регуляризации σ_k с параметрами процедуры $\mathscr{P}$ так, чтобы обеспечить требуемую сходимость итогового алгоритма. Такой подход составляет идею метода *итеративной регуляризации* для задачи математического программирования (более подробно см. в [10]).

Приведем одну из возможных реализаций метода итеративной регуляризации для нахождения нормального решения задачи (15.2), основанную на применении функции $L_\sigma(x, \lambda)$. В качестве $\mathscr{P}$ возьмем одну из модификаций градиентного метода отыскания седловых точек выпукло-вогнутых функций.

Пусть вместо A, b, c в задаче (15.1) известны их приближения A^δ, b^δ, c^δ с погрешностью $\max\{\|A^\delta - A\|, \|b^\delta - b\|, \|c^\delta - c\|\} \leqslant \delta$. Построим приближенную регуляризованную функцию Лагранжа

$$L_\sigma^\delta(x, \lambda) = (c^\delta, x) + (\lambda, A^\delta x - b^\delta) + \alpha \|x\|^2 - \beta \|\lambda\|^2.$$

Аналогично пункту 15.2 обозначим $g_\sigma^\delta(x) = \max\limits_{\lambda \geqslant 0} L_\sigma^\delta(x, \lambda)$. Очевидно, что $g_\sigma^\delta(x) = L_\sigma^\delta(x, \lambda^\delta(x))$, где $\lambda^\delta(x) = \frac{1}{2\beta}(A^\delta x - b^\delta)^+$.

Пусть $\Omega = \{x\colon \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}\}$, $\underline{x}$, $\overline{x}$ — фиксированные точки из $\mathbf{R}^n$, при этом $\overline{x}_0^* \in \operatorname{int}\Omega$. Зададим начальную точку $x^0 \in \Omega$. Определим последовательности положительных чисел $\sigma_k = [\alpha_k, \beta_k]$, μ_k, δ_k так, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \mu_k = \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0,$$

$$\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \leqslant \frac{\beta_k}{\alpha_k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{\beta_k} = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\beta_k^2} < \infty, \tag{15.30}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k \delta_k}{\beta_k} < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^{1/2} < \infty.$$

Считая известными x^k, λ^k, положим

$$\begin{gathered} \lambda^{k+1} = \frac{1}{2\beta_k}\left(A^{\delta_k} x^k - b^{\delta_k}\right)^+; \\ x^{k+1} = P_\Omega\left((1 - 2\alpha_k \mu_k)\, x^k - \mu_k\left(c^{\delta_k} + \left(A^{\delta_k}\right)^T \lambda^{k+1}\right)\right). \end{gathered} \tag{15.31}$$

Теорема 15.5. *Последовательность* $\{x^k\}$, *построенная в соответствии с* (15.31), *сходится при управлении параметрами* σ_k, μ_k, δ_k *согласно* (15.30) *к нормальному решению задачи* (15.2).

Доказательство. Обозначим $g^k(x) = g_{\sigma_k}^{\delta_k}(x)$. В силу (15.22) существует число K такое, что $x^{\sigma_k} \in \Omega$ при $k \geqslant K$. Из определения последовательностей $\{x^k\}$ и $\{\lambda^k\}$ вытекает (при $k \geqslant K$):

$$\begin{aligned}
&\left\| x^{k+1} - x^{\sigma_{k+1}} \right\|^2 \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left\| x^k - x^{\sigma_{k+1}} - \mu_k \nabla_x L_{\sigma_k}^{\delta_k}\left(x^k, \lambda^{k+1}\right) \right\|^2 = \\
&\qquad = \left\| x^k - x^{\sigma_{k+1}} - \mu_k \nabla g^k\left(x^k\right) \right\|^2 = \\
&\qquad = \left\| x^k - x^{\sigma_k} + x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}} - \mu_k \nabla g^k\left(x^k\right) \right\|^2 = \\
&\qquad = \left\| x^k - x^{\sigma_k} \right\|^2 + \left\| x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}} \right\|^2 + \mu_k^2 \left\| \nabla g^k\left(x^k\right) \right\|^2 + \\
&\qquad + 2\left(x^k - x^{\sigma_k}, x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}}\right) - 2\mu_k\left(\nabla g^k\left(x^k\right), x^k - x^{\sigma_k}\right) - \\
&\qquad - 2\mu_k\left(\nabla g^k\left(x^k\right), x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}}\right). \qquad (15.32)
\end{aligned}$$

Учитывая (15.22) и (15.30), имеем

$$\begin{aligned}
&\left\| x^{\sigma_{k+1}} - x^{\sigma_k} \right\| \leqslant \left\| x^{\sigma_{k+1}} - x_0^* \right\| + \left\| x^{\sigma_k} - x_0^* \right\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left\| u_0^* \right\| \left[\left(\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \right)^{1/2} + \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2} \right] \leqslant 2 \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2} \left\| u_0^* \right\| \quad \forall k \geqslant K.
\end{aligned}$$

Поэтому в силу ограниченности Ω существует константа d_1 такая, что при $k \geqslant K$ выполняется

$$\left\| x^{\sigma_{k+1}} - x^{\sigma_k} \right\|^2 + 2\left(x^k - x^{\sigma_k}, x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}}\right) \leqslant d_1 \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2}. \qquad (15.33)$$

Далее оценим

$$\begin{aligned}
&\left\| \nabla g^k\left(x^k\right) \right\| = \\
&\qquad = \frac{1}{\beta_k} \left\| \beta_k c^{\delta_k} + \frac{1}{2}\left(A^{\delta_k}\right)^T \left(A^{\delta_k} x^k - b^{\delta_k}\right)^+ + 2\alpha_k\beta_k x^k \right\| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\beta_k} \left[\beta_k \left\| c^{\delta_k} \right\| + \frac{1}{2} \left\| A^{\delta_k} \right\| \left\| \left(A^{\delta_k} x^k - b^{\delta_k}\right)^+ \right\| + 2\alpha_k\beta_k \left\| x^k \right\| \right] \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\beta_k} \Big\{ \beta_k\left(\|c\| + \delta_k\right) + \frac{1}{2}\left(\|A\| + \delta_k\right)\left[\left(\|A\| + \delta_k\right)\left\|x^k\right\| + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \|b\| + \delta_k\right] + 2\alpha_k\beta_k \left\| x^k \right\| \Big\}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|\nabla g^k(x^k)\| \leqslant \frac{1}{\beta_k} d_2, \tag{15.34}$$

где $d_2 = \text{const}$. Следовательно, при $k \geqslant K$

$$2\mu_k \left| \left(\nabla g^k(x^k), x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}} \right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu_k \|\nabla g^k(x^k)\| \|x^{\sigma_k} - x^{\sigma_{k+1}}\| \leqslant \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2} d_3, \tag{15.35}$$

$$d_3 = 4 \frac{\mu_0}{\beta_0} d_2 \|u_0^*\|.$$

Далее преобразуем

$$-2\mu_k \left(\nabla g^k(x^k), x^k - x^{\sigma_k} \right) = -2\mu_k \left(\nabla g_{\sigma_k}(x^k), x^k - x^{\sigma_k} \right) +$$
$$+ 2\mu_k \left(\nabla g_{\sigma_k}(x^k) - \nabla g^k(x^k), x^k - x^{\sigma_k} \right).$$

Поскольку всегда $|q^+ - r^+| \leqslant |q - r|$, то

$$\left\| \nabla g_{\sigma_k}(x^k) - \nabla g^k(x^k) \right\| = \left\| c - c^\delta + \frac{1}{2\beta_k} \left[A^T (Ax^k - b)^+ - \right.\right.$$
$$- (A^{\delta_k})^T (Ax^k - b)^+ + (A^{\delta_k})^T (Ax^k - b)^+ -$$
$$\left.\left. - (A^{\delta_k})^T (A^{\delta_k} x^k - b^{\delta_k})^+ \right] \right\| \leqslant \delta_k + \frac{1}{2\beta_k} \left[\delta_k \|(Ax^k - b)^+\| + \right.$$
$$\left. + (\|A\| + \delta_k) \delta_k (\|x^k\| + 1) \right].$$

Отсюда в силу непрерывности на Ω функции $\varphi_0(x) = \|(Ax - b)^+\|$ существует константа d_4 такая, что

$$2 \left| \left(\nabla g_{\sigma_k}(x^k) - \nabla g^k(x^k), x^k - x^{\sigma_k} \right) \right| \leqslant \frac{\delta_k}{\beta_k} d_4 \quad \forall k \geqslant K. \tag{15.36}$$

Учитывая неравенства (15.33), (15.36), из (15.32) имеем (при $k \geqslant K$):

$$\|x^{k+1} - x^{\sigma_{k+1}}\|^2 \leqslant \|x^k - x^{\sigma_k}\|^2 - 2\mu_k \left(\nabla g_{\sigma_k}(x^k), x^k - x^{\sigma_k} \right) +$$
$$+ \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2} (d_1 + d_3) + \frac{\mu_k^2}{\beta_k^2} d_2^2 + \frac{\mu_k \delta_k}{\beta_k} d_4. \tag{15.37}$$

Пусть существуют $\varepsilon_0 > 0$ и натуральное $S \geqslant K$ такие, что

$$-2\beta_k \left(\nabla g_{\sigma_k}(x^k), x^k - x^{\sigma_k} \right) \leqslant -\varepsilon_0 \quad \forall k \geqslant S.$$

Просуммируем (15.37) от $k=S$ до $k=S+t$. Получим

$$0 \leqslant \left\| x^{S+t+1} - x^{\sigma_{S+t+1}} \right\|^2 \leqslant \left\| x^S - x^{\sigma_S} \right\|^2 - \varepsilon_0 \sum_{k=S}^{S+t} \frac{\mu_k}{\beta_k} + \\ + (d_1 + d_3) \sum_{k=S}^{S+t} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2} + d_2^2 \sum_{k=S}^{S+t} \frac{\mu_k^2}{\beta_k^2} + d_4 \sum_{k=S}^{S+t} \frac{\mu_k \delta_k}{\beta_k},$$

что при достаточно большом t приводит к противоречию с условиями (15.30). Поэтому из $\{x^k\}$ можно выделить последовательность $\{x^l\}$, для которой

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{\alpha_l} \left(\nabla g_{\sigma_l}(x^l), x^l - x^{\sigma_l} \right) \leqslant 0. \qquad (15.38)$$

Так как $g_\sigma(x)$ — выпуклая функция по x и $g_\sigma(x^\sigma) = \min\limits_x g_\sigma(x)$, то для любых k

$$\left(\nabla g_{\sigma_k}(x^k), x^{\sigma_k} - x^k \right) \leqslant g_{\sigma_k}\left(x^{\sigma_k}\right) - g_{\sigma_k}(x^k) \leqslant 0. \qquad (15.39)$$

Из определения сильной выпуклости $g_\sigma(x)$ по x вытекает неравенство $\left\| x^k - x^{\sigma_k} \right\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_k} \left[g_\sigma(x^k) - g_\sigma\left(x^{\sigma_k}\right) \right]$, откуда с учетом (15.38), (15.39) получаем $\lim\limits_{l\to\infty} \left\| x^l - x^{\sigma_l} \right\| = 0$. Так как согласно (15.22) и условий на выбор шага $\lim\limits_{l\to\infty} x^{\sigma_l} = x_0^*$, то $\left\| x^l - x_0^* \right\| \to 0$ при $l \to \infty$.

Выберем далее для произвольного $\varepsilon > 0$ номер $l = L$ так, чтобы

$$\left\| x^L - x_0^* \right\| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{k=L}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{4(d_1 + d_3)},$$

$$\sum_{k=L}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\beta_k^2} < \frac{\varepsilon}{4d_2^2}, \quad \sum_{k=L}^{\infty} \frac{\mu_k \delta_k}{\beta_k} < \frac{\varepsilon}{4d_4}.$$

Суммируя (15.37) от $k=L$ до $k=t-1$ и учитывая (15.39), получим $\left\| x^t - x^{\sigma_t} \right\| < \varepsilon$ для произвольного $t > L$. Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \lim\limits_{k\to\infty} x^{\sigma_k} = x_0^*$. Теорема доказана.

Примером последовательностей σ_k, μ_k, δ_k, удовлетворяющих условиям (15.30), могут служить $\alpha_k = (k+1)^{-\omega}$, $\beta_k = (k+1)^{-2-2\omega}$, $\mu_k = (k+1)^{-5/2-3\omega}$, $\delta_k = (k+1)^{-1/2}$, $0 < \omega \leqslant 1/2$.

ГЛАВА IV

КОМИТЕТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Некоторые практические несобственные задачи прогнозирования, планирования производства, проектирования технико-экономических или других систем, управления технологическими или иными процессами, моделируемые как задачи ЛП, могут иметь такой смысл, что для них естественно отыскивать не приближенное решение типа непрерывной аппроксимации, а какое-либо дискретное приближение. Понятие дискретного приближения, тесно связанное с понятиями *максимальной совместной* и *минимальной несовместной* подсистем, может быть реализовано с помощью комитетных конструкций. О способах реализации и интерпретации дискретных аппроксимаций в прикладных задачах и идет речь в настоящей главе.

§ 16. Понятие комитета

Понятие *комитета* основано на следующей идее. Если система ограничений задачи оптимизации несовместна, то, тем не менее, вместо решения можно пытаться найти «коллектив» точек — такой, что за удовлетворение каждого ограничения будет «голосовать» большинство членов этого коллектива, т. е. каждому ограничению будет удовлетворять более половины из всех точек. Применение этого понятия во многих случаях имеет практический смысл. Для иллюстрации рассмотрим некоторые стохастические задачи управления сельскохозяйственным производством.

В работе [43] указываются некоторые факторы стохастичности постановки задач оптимизации сельскохозяйственного производства (в первую очередь такими факторами являются погодные условия).

Можно выписать систему ограничений на допустимость плана сельскохозяйственного производства, которая будет отражать требования, реализующиеся при различных вариантах погодных условий, а потому являться несовместной. Тогда можно заготовить решения максимальных совместных подсистем, которые будут корректироваться в ходе реализации действительных условий.

16.1. Комитет системы множеств. Дадим строгие определения [56]. Пусть $\mathscr{D} = \{D_j\colon\ j \in J\}$ — некоторая система множеств D_j. Тогда при $0 \leqslant p < 1$ назовем *p-комитетом* для системы $\mathscr{D}$ такое конечное множество K, что $|K \cap D_j| > p|K|\ \ \forall j \in J$, где $|K|$ — число элементов множества K. Если $p = 1/2$, то p-комитет называется комитетом. Поясним смысл этого определения: за каждое ограничение вида $x \in D_j$ «голосует» более чем $1/p$-я часть членов p-комитета. Если $p = 1/2$, то требование конечности числа членов комитета можно снять: *комитетом* системы $\mathscr{D} = \{D_j\colon\ j \in J\}$ называется такое множество K, что $|K \cap D_j| > |K \backslash D_j|$, где $|K|$ означает мощность множества K. Приведем некоторые примеры.

1. Комитет системы оптимальных множеств. Рассмотрим многокритериальную задачу максимизации линейных функций на многограннике. Пусть допустимое множество $M \subset \mathbf{R}^n$ задается системой неравенств $(a,\ x) \leqslant b$, $x \geqslant 0$, где $a > 0$, $b > 0$, $x = [x_1, \ldots, x_n]$. Максимизируемые функции таковы: $f_1(x) = (a,\ x)$, $f_2(x) = -x_1, \ldots, f_{n+1}(x) = -x_n$. Через $\tilde{M}_j$ обозначим $\operatorname{Arg\,max}\{f_j(x)\colon\ x \in M\}$. Множества $\tilde{M}_j$ — это грани многогранника M. Комитет системы $\{\tilde{M}_1, \ldots, \tilde{M}_{n+1}\}$ — множество всех вершин многогранника (при $n > 1$). Он является p-комитетом при $p < n/(n+1)$.

2. Идентификация точки. Пусть $\{x_s\} \to x'$. Тогда множество $\{x_s\}$ является комитетом любой системы окрестностей точки x'.

3. Статистические показатели. Пусть некоторая популяция M, подвергаемая статистическому обследованию, каким-либо естественным образом разбита на m подпопуляций: $M = \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j$, $M_i \cap M_j = \varnothing$ при $i \neq j$. По некоторому признаку (предикату) $\mathscr{P}$ популяция M разбивается на два класса: класс M', для членов x которого предикат $\mathscr{P}$ принимает значение «истина», $M' = \{x \in M\colon\ \mathscr{P}(x) = 1\}$, и класс $M'' = \{x \in M\colon\ \mathscr{P}(x) = 0\}$, состоящий из всех остальных членов популяции. Если выполняется ограничение на процентное содержание в каждой подпопуляции элементов, удовлетворяющих предикату $\mathscr{P}$:

$$|\{x \in M_j\colon\ \mathscr{P}(x) = 1\}|/|M_j'| > p \quad \forall j \in \mathbf{N}_m,$$

то множество M' является p-комитетом для системы множеств $\{M_j\colon\ j\in \mathbf{N}_m\}$.

16.2. Комитет системы линейных неравенств. Рассмотрим систему линейных неравенств над пространством $\mathbf{R}^n$:

$$l_j(x) = (a_j,\ x) - b_j \leqslant 0, \qquad j\in \mathbf{N}_m. \tag{16.1}$$

Пусть $0\leqslant p<1$. Конечное множество $K\subset \mathbf{R}^n$ называется *p-комитетом* системы (16.1), если K является p-комитетом системы множеств $\{x\colon\ l_j(x)\leqslant 0\}$ $(j\in \mathbf{N}_m)$. В частности, *комитетом* системы (16.1) называется конечное множество $K\subset \mathbf{R}^n$ такое, что каждому неравенству системы удовлетворяет более половины элементов этого множества.

Приведем пример. Пусть система линейных неравенств имеет вид $(a,\ x)\leqslant b$, $-x_1\leqslant 0,\ \ldots,\ -x_n\leqslant 0$, где $a>0$, $b<0$, $x=[x_1,\ \ldots,\ x_n]$, $a=[a_1,\ \ldots,\ a_n]$. Эта система несовместна, но она обладает комитетом из следующих трех векторов:

$$[1,\ldots,1],\ \left[1,\ldots,1,\frac{b-\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i}{a_n}\right],\ \left[\frac{b-\sum\limits_{i=2}^{n}a_i}{a_1},1,\ldots,1\right].$$

Приведем теперь более сложный пример, связанный со стохастическим программированием. Рассмотрим задачу: найти $x\in X$, такое, что

$$p_\omega\{f_j(x,\omega)\leqslant 0\}\geqslant p_j \quad \forall j\in \mathbf{N}_m,$$

где ω — вероятностный параметр, $p_\omega\{f_j(x,\ \omega)\leqslant 0\}$ — вероятность выполнения неравенства $f_j(x,\ \omega)\leqslant 0$. Если эта задача неразрешима, то можно провести рандомизацию по x, отыскивая смешанную стратегию, которая и является аналогом понятия комитета.

Наконец, рассмотрим пример, связанный с обобщенным решением следующей задачи оптимизации:

$$\sup\{f(x)\colon\ f_j(x)\leqslant 0 \quad \forall j\in \mathbf{N}_m,\ x\in C\} = \tilde{f}.$$

Обобщенным решением этой задачи здесь назовем последовательность $K=\{x_s\}\subset C$ такую, что $\lim\limits_{s\to\infty} f(x_s)=\tilde{f}$, $\lim\limits_{s\to\infty} f_j(x_s)\leqslant 0 \quad \forall j\in \mathbf{N}_m$. Очевидно, обобщенное решение является комитетом системы неравенств $f(x)\geqslant \tilde{f}-\varepsilon$, $f_j(x)\leqslant \varepsilon \quad \forall j\in \mathbf{N}_m$, где $\varepsilon>0$.

16.3. Разделяющий комитет. В выпуклом анализе, теории оптимизации и в распознавании образов большое значение имеет следующая задача построения разделяющего линейного функционала. Пусть заданы два множества: M_1, $M_2 \subset \mathbf{R}^n$. Требуется найти функционал $l(x) = (a, x)$ и число b такие, что

$$l(x) + b > 0 \quad \forall x \in M_1, \qquad l(x) + b < 0 \quad \forall x \in M_2.$$

Здесь записана система линейных неравенств относительно неизвестного вектора $[a;\ b] \in \mathbf{R}^{n+1}$. Если она несовместна, то можно ставить задачу отыскания ее комитета. Таким образом, возникает следующее определение.

Разделяющим множества M_1 и M_2 *p-комитетом* функционалов класса F называется такое множество $\{f_1, \ldots, f_q\} \subset F$, что для всякого x из множества M_1 выполняется более чем $1/p$-я часть из совокупности неравенств $f_i(x) > 0$ $(i = 1, \ldots, q)$, а для всякого x из M_2 — более чем $1/p$-я часть неравенств $f_i(x) < 0$ $(i = 1, \ldots, q)$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $M_1 = \{[0,\ 1], [1,\ 0]\}$, $M_2 = \{[1,\ 1]\}$. Линейного функционала, разделяющего M_1 и M_2, не существует. Однако M_1 и M_2 разделимы следующим комитетом K линейных функций:

$$K = \{f_1(x) = x_1 + x_2,\ \ f_2(x) = -2x_1 + x_2,\ \ f_3(x) = x_1 - x_2\}.$$

16.4. Обзор исследований по теории комитетов. Понятие «committee solution» (мы используем термин «комитет») для несовместной системы однородных строгих линейных неравенств над пространством $\mathbf{R}^n$ было введено в [97]: *комитетом* системы

$$(c_j, x) > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m \tag{16.2}$$

называется такое множество $K = \{x_1, \ldots, x_q\} \subset \mathbf{R}^n$, что всякому неравенству системы удовлетворяет более половины элементов этого множества. В первоначальных работах [97, 98, 106] дано без доказательства достаточное условие существования комитета, приведены геометрические пояснения к обоснованию этого условия, рассмотрена одна из возможных технических реализаций.

В дальнейшем [50—59] получены следующие результаты:

1) Доказано необходимое и достаточное условие существования комитета системы (16.2), дана оценка числа членов минимального комитета;

2) Доказаны теоремы существования комитета для более общих классов систем неравенств (неоднородных, нелинейных, сопряженного вида) и для систем включений;

3) Разработаны и обоснованы вычислительные схемы для построения p-комитетов, в том числе минимальных;

4) Даны направления приложений комитетных конструкций в распознавании образов, вычислительной математике, теории оптимизации и в принятии решений.

В [65] отражены исследования алгоритма типа линейной коррекции для построения комитета системы линейных неравенств. В этой работе распознающая система, основанная на понятии комитета, трактуется как трехслойный перцептрон [71] и называется ассоциативной машиной. Приведены результаты численных экспериментов и вытекающие из них рекомендации по выбору начальных приближений к членам комитета. Сходимость последовательных приближений к членам комитета не гарантируется. Некоторые условия, при которых имеет место сходимость, указаны в работе [48]. В [101] рассматриваются условия сходимости обучающей процедуры коррекции для комитетного решения задачи классификации; показано, что нет гарантии сходимости к решению, и высказано утверждение, что только стохастическое обучение может быть успешным.

Отработке вычислительных схем по методам [50—59], а также программированию и решению прикладных задач с помощью метода комитетов посвящены работы [61]. Большое значение для теории комитетов (особенно для проблемы минимального комитета) имеет метод свертывания для систем линейных неравенств, разработанный и обоснованный С. Н. Черниковым [90, 91]. Этот метод позволяет находить все минимальные несовместные и все максимальные совместные подсистемы системы линейных неравенств. В [84] предложены некоторые модификации определения комитета и рекуррентные процедуры его построения. В [112] обобщается комитетная логика принятия решений, рассматриваются методы с различными комитетами логики. Отметим также работы по методам построения комитетных решающих правил распознавания образов [120].

Комитетные конструкции применяются в задачах принятия решений, в том числе при оптимизации с противоречивыми условиями и с несколькими критериями, в задачах планирования с плохо формализуемыми условиями, при диагностике и классификации [57, 110].

В настоящее время многообразие методов распознавания образов упорядочивается с точки зрения некоторых общих подходов: Ю. И. Журавлевым [40, 41] — с позиций алгебраической теории алгоритмов, Дж. Саймоном [117] — на основе математической логики и алгоритмических языков и другими. В частности, в [40, 41] анализируется структура классов алгоритмов голосования, класса комитетных алгоритмов, а также стандартных классов алгоритмов распознавания образов.

§ 17. Теоремы существования

Применимость комитетных конструкций в решении прикладных задач основана, в частности, на том, что существование p-комитетов обеспечивается весьма слабыми условиями. Кроме того, известные доказательства теорем существования [51, 52] конструктивны в том смысле, что они содержат алгоритмы построения комитетов.

Теорема 17.1. *Если система множеств* $\mathscr{D}=\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ *такова, что всякие s ее множеств имеют непустые пересечения, то при $s/m > p$ существует p-комитет для системы* $\mathscr{D}$.

Доказательство. Для каждой совокупности s различных множеств возьмем один элемент пересечения этих множеств, и из таких элементов составим множество K. Множество K является p-комитетом, так как

$$|K| = C_m^s, \quad |K \cap D_j| \geqslant C_{m-1}^{s-1}.$$

Теорема 17.2. *Для того, чтобы система линейных неравенств над пространством* $\mathbf{R}^n$

$$(c_j, x) < b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

обладала комитетом, необходимо и достаточно, чтобы любая ее подсистема из двух неравенств была совместной.

Доказательство. Доказательство вытекает из следующего утверждения. Пусть система неравенств

$$(c_j, x) > \alpha_j \quad \forall j \in J_{\text{A}} = N_m \tag{17.1}$$

такова, что среди c_j нет коллинеарных пар и нулевых векторов, а для системы

$$(c_j, x) > \alpha_j \quad \forall j \in J_A, \quad (b_k, x) > \beta_k \quad \forall k \in J_B \qquad (17.2)$$

выполняются условия $J_B \subset J_A$, $b_k = -\gamma_k c_k$, $\gamma_k > 0$. Тогда для существования комитета системы (17.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\gamma_k \alpha_k + \beta_k < 0$ $\forall k \in J_B$.

Докажем достаточность последнего условия (необходимость очевидна). Пусть $a = \max\limits_{j \in J_A} \alpha_j$, $l = \min\limits_{j \in J_A} \|c_j\|^2$, $L = \max\limits_{j \in J_A} \|c_j\|^2$. Непосредственной подстановкой в систему (17.1) проверяется, что одним из комитетов этой системы является множество

$$K = \left\{\frac{\alpha_1 + \varepsilon}{\|c_1\|^2} c_1,\ g_2 + \frac{\alpha_2 + \varepsilon}{\|c_2\|^2} c_2,\ -g_2 + \frac{\alpha_2 + \varepsilon}{\|c_2\|^2} c_2, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, g_m + \frac{\alpha_m + \varepsilon}{\|c_m\|^2} c_m,\ -g_m + \frac{\alpha_m + \varepsilon}{\|c_m\|^2} c_m \right\},$$

где ε — произвольное положительное число, а g_j выбираются из условий

$$(g_j, c_j) = 0, \quad j = 2, \ldots, m;$$
$$(g_j, c_i) > L\frac{a + \varepsilon}{l} + a, \quad i \in N_m, \quad j = 2, \ldots, m, \quad i \neq j.$$

Выбор нужных g_j гарантирован условиями утверждения.

Чтобы множество K было комитетом системы (17.2), должны выполняться следующие соотношения:

$$\left(b_1, \frac{\alpha_1 + \varepsilon}{\|c_1\|^2} c_1\right) > \beta_1; \quad \left(b_k, \pm g_k + \frac{\alpha_k + \varepsilon}{\|c_k\|^2} c_k\right) > \beta_k \forall k \neq 1.$$

Очевидно, эти соотношения выполняются при

$$\varepsilon < -\max_{k \in J_B} \frac{\gamma_k \alpha_k + \beta_k}{\gamma_k}.$$

Последнее неравенство разрешимо, так как $\gamma_k \alpha_k + \beta_k < 0$.

Теорема 17.3. *Пусть множества A, $B \subset \mathbf{R}^n$ конечны. Для того, чтобы существовал разделяющий эти множества комитет аффинных функций (т. е. функций вида $f(x) = (a, x) + b$), необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B = \varnothing$.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 17.2.

§ 18. Комитетное решение плохо формализуемых задач распознавания образов и математического программирования

Когда в модели математического программирования, описывающей какой-либо реальный объект, мы пытаемся учесть все существенные ограничения на переменные, то часто приходится сталкиваться с необходимостью записывать и плохо формализуемые зависимости. Точно так же постановка задач классификации и диагностики объектов и ситуаций по набору измеряемых параметров может содержать плохо формализуемые элементы. Отражение плохо формализуемых зависимостей, ограничений и факторов может быть осуществлено методами распознавания образов, где функция, которая должна моделировать искомую зависимость, получается в результате решения некоторой системы уравнений и неравенств. Однако часто система оказывается несовместной, и тогда приходится использовать понятие ее комитетного решения, а плохо формализуемую зависимость представлять с помощью комитета функций. Приступим к подробному описанию этой техники.

18.1. Комитетное решение задач распознавания образов. Рассмотрим следующие математические модели задач распознавания образов: модель объекта, модель образа, задача дискриминантного анализа, задача таксономии.

В *распознавании образов* рассматриваются методы классификации и интерпретации объектов и ситуаций. Моделью объекта служит элемент пространства $\mathbf{R}^n$; его координаты — значения некоторых параметров, измеряемых на объекте или кодирующих те или иные его качественные характеристики. *Образ* — класс объектов, сходных друг с другом в некотором фиксированном отношении; математической моделью образа служит подмножество пространства $\mathbf{R}^n$.

Задача *дискриминантного анализа* состоит в следующем. Имеется некоторое неизвестное разбиение множества всех объектов определенного вида на классы — образы. Это разбиение соответствует какой-то естественной закономерности. Его нужно с той или иной точностью восстановить на основе материала обучения («по прецедентам»), который представляет собой известные, чаще всего конечные, подмножества образов.

Математическая формализация этой задачи такова. Неизвестное разбиение пространства на образы пусть имеет вид: $\mathbf{R}^n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$. Множества $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k$ неизвестны, но заданы их подмножества: $A_1', A_2', \ldots, A_k'$. По этой информации требуется из заданного множества Φ решающих правил выбрать правило $\varphi \in \Phi \subset \{\mathbf{R}^n \to \mathbf{N}_k\}$, которое формулировало бы следующее представление об образах: $\varphi(x) = i \Leftrightarrow x \in A_i$. Такое φ должно удовлетворять системе условий:

$$x \in A_i' \Rightarrow \varphi(x) = i, \quad \varphi \in \Phi.$$

Кроме того, выбор φ диктуется некоторым априорным принципом, отражающим соответствующую гипотезу о строении образов.

Детализацию этого подхода проведем для случая двух образов (ясно, что задачу с k образами можно свести к последовательности задач с двумя образами). Пусть $\mathbf{R}^n = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, где множества A и B неизвестны, и заданы подмножества $A' \subset A$, $B' \subset B$. Пусть F — некоторый класс функций n-мерного вектора. Запишем систему неравенств сопряженного вида (т. е. относительно неизвестной функции f):

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A', \quad f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in B', \quad f \in F.$$

Если f — некоторое решение этой системы, то в качестве приближенного представления об образах A и B можно положить следующее:

$$A = \{x\colon f(x) > 0\}, \quad B = \{x\colon f(x) \leqslant 0\}.$$

Если же система несовместна, но найден ее комитет $K = \{f_1, \ldots, f_q\}$, то для всякого $x \in \mathbf{R}^n$ можно положить, что $x \in A$, если $f_i(x) > 0$ более чем для половины номеров $i \in \mathbf{N}_q$, и $x \in B$ в противном случае.

Рассмотрим одну из математических моделей следующей задачи *таксономии*: заданную совокупность объектов требуется разбить на классы (таксоны) так, чтобы в один таксон попали близкие друг к другу объекты, а в разные — достаточно далекие. При этом понятие близости соответствует содержательному смыслу задачи и цели, с которой производится разбиение на классы. Эта задача отличается от предыдущей тем, что в ней не используются прецеденты.

Можно предложить следующую формализацию. Задано множество $A \subset \mathbf{R}^n$ и множество F функций, задающее допустимую форму таксона, а именно: таксоны должны иметь вид $A \cap \{x\colon f(x) \leqslant 0\}$, $f \in F$. Запишем систему относительно f:

$$f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in A, \quad f \in F.$$

Если она совместна и $\bar{f}$ — ее решение, то A состоит из одного таксона: $A = A \cap \{x\colon \bar{f}(x) \leqslant 0\}$. В противном случае таксоны определяются решениями максимальных совместных подсистем этой системы.

18.2. Комитетные конструкции в задачах математического программирования с плохо формализуемыми ограничениями. В работах [53, 55] алгоритмы распознавания образов вводятся (как неформальные блоки переработки информации) в численные методы, в частности, в методы математического программирования для задач с *плохо формализуемыми* ограничениями и критериями. Эти комбинированные методы предусматривают обращение к эксперту или к экспериментам для оценки на допустимость (по плохо формализуемым закономерностям) конечных множеств векторов. Материал экспертиз используется для формирования правила, согласно которому любой вектор (план) относится к числу допустимых или недопустимых. Варианты комбинированных методов отвечают различным формам диалога с экспертом, информации о планах, а также видам используемых решающих правил. Для отражения плохо формализуемых ограничений используются достаточно сложные решающие правила, например, комитетные. При этом решающее правило корректируется по мере накопления и пополнения материала экспертиз.

Методы, в которых реализованы простейшие формы диалога с экспертом, распространенные в практике решения экономико-математических задач, лишь при очень сильных предположениях дают сходимость последовательности возникающих векторов к оптимальному плану, а в обычных условиях они только позволяют моделировать плохо формализуемые ограничения в некоторой области пространства планов.

Рассмотрим задачу математического программирования: найти

$$\arg\sup \{f_0(x)\colon f_j(x) \leqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \ x \in D\}.$$

Будем предполагать, что ограничение $x \in D$ плохо формализуемо. Пусть к моменту t об этом ограничении накоплена следующая экспертная информация: известны множества

$$A_t \subset D, \quad B_t \subset \mathbf{R}^n \setminus D.$$

Если мы хотим моделировать ограничение $x \in D$ с помощью линейного неравенства, то возникает задача аффинного дискриминантного анализа: найти функцию $f(x) = (y, x) + z$ такую, что

$$f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in A_t, \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in B_t. \tag{18.1}$$

Чаще всего эта задача дискриминантного анализа оказывается несобственной, ввиду несовместности соответствующей системы неравенств. Однако, если множества A_t и B_t конечны и $A_t \cap B_t = \varnothing$, то существует аффинный разделяющий комитет — множество аффинных функций $K = \{\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_q\}$, являющееся комитетом системы (18.1). Тогда соотношение $x \in D$ моделируется следующим:

$$x \in D \Leftrightarrow \bar{f}_i(x) > 0$$

более чем для половины номеров $i \in \mathbf{N}_q$.

18.3. Алгебраические системы и эмпирические закономерности. *Эмпирические закономерности* могут обнаруживаться как алгебраические структуры в массивах данных. Степень проявления закономерности в массиве данных $M \subset \mathbf{R}^n$ можно оценивать максимальной простотой алгебраической системы, допускаемой этим массивом. Отметим применение в [42] аппарата теории алгебраических систем в построении общей теории распознавания образов.

Конструктивное оформление предлагаемого подхода возможно, в частности, если в качестве используемого класса алгебраических систем выступает класс систем уравнений и неравенств с полиномами от $x \in M$ в левых частях. Векторными параметрами оценки степени проявления закономерности могут служить решения минимальных несовместных и максимальных совместных подсистем этих систем.

Одна из сфер приложений такого подхода — нахождение плохо формализуемых закономерностей и ограничений в моделях оптимизации планирования и проектирования сложных технико-экономических и природных систем. Под закономерностью класса [Ф, =] в массиве

$M \subset \mathbf{R}^n$ будем понимать

$$f \in \Phi\colon\ f(x) = 0 \quad \forall x \in M.$$

В случае несовместности этой системы можно искать приближенное решение или же максимальные совместные подсистемы.

Аналогично, закономерность класса $[\Phi, \leqslant]$ имеет вид

$$f \in \Phi\colon\ f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in M.$$

При этом опять можно говорить о том или ином приближении к решению.

§ 19. Допустимые коррекции комитетной дискриминации

19.1. Введение. В настоящем параграфе рассматривается понятие *допустимой коррекции* несобственной задачи. Изучаются требующие коррекции противоречивые ситуации комитетных решений несобственных задач классификации и оптимизации. В частности, исследуются вопросы устойчивости таких решений и нетранзитивности комитетных предпочтений.

Общая постановка вопроса такова. Пусть имеется некоторая несобственная задача P математического программирования или распознавания образов, имеющая вид несовместной системы уравнений и неравенств, и пусть задан класс N ее допустимых коррекций (структурных и информационных). Каждая коррекция может быть оценена с точки зрения ее сложности: например, на множестве N может быть задано соответствующее отношение предпочтения. Задача состоит в нахождении коррекции с достаточно малой сложностью, превращающей задачу в собственную.

19.2. Виды коррекций. Идентификационная коррекция несобственной модели может относиться к открытой системе моделирования, когда коррекция обусловлена доступом к дополнительной внемодельной информации, возможностью обращения к новому материалу обучения. Коррекция несобственной модели, основанная на непрерывной или дискретной ее аппроксимации, может быть проведена и на основе несодержательных критериев минимизации коррекции, делающей модель собственной: такая коррекция относится к замкнутой модели.

Коррекция может быть информационной или структурной. Так, может быть поставлена задача минимального корректирования информационной составляющей (матрицы данных), при котором получается собственная модель. При этом должно быть указано то подмножество коэффициентов (в частности, это может быть и все множество), которое разрешается подвергать изменению. Примером может служить метод линейной коррекции в задаче дискриминантного анализа, при котором по мере пополнения материала обучения идентификация разделяющего правила проводится по одной и той же простой схеме. Другой пример: если задача линейного программирования $\max\{c^Tx\colon Ax \leqslant b\}$, определяемая матрицей данных $\begin{bmatrix} c & 0 \\ A & b \end{bmatrix}$, — несобственная, то решаем задачу нахождения минимальной по норме матрицы коррекции данных $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta c & 0 \\ \Delta A & \Delta b \end{bmatrix}$ такой, что задача

$$\max\{(c+\Delta c)^Tx\colon\ (A+\Delta A)x \leqslant b+\Delta b\}$$

является собственной.

Структурная коррекция — это, например, выделение максимальных совместных подсистем ограничений (горизонтальная коррекция) или добавление новых переменных (вертикальная коррекция).

Имеется двойственная связь между горизонтальной и вертикальной коррекциями. Имеется также связь между информационной и структурной коррекциями. Например, операция выделения максимальной совместной подсистемы может быть представлена как информационная коррекция, когда правые части некоторых ограничений делаются достаточно большими.

19.3. Коррекция комитетной дискриминации. Рассмотрим вопрос об устойчивости комитетного решения задачи дискриминантного анализа и о соответствующих допустимых коррекциях. Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$. Будем говорить, что *множество* A *— без противоречий*, если $a,\ b \in A,\ \lambda \geqslant 0 \Rightarrow a + \lambda b \neq 0$. В противном случае *множество* A *— с противоречиями.*

Напомним, что комитетом системы уравнений и неравенств называется такое множество K, что каждому соотношению системы удовлетворяет большинство элементов множества K.

Если множество $A\subset\mathbf{R}^n$ — с противоречиями, то система

$$(a,x)>0\quad\forall a\in A,\tag{19.1}$$

где $x\in\mathbf{R}^n$, не обладает комитетом. При этом в случае $n=1$ малые коррекции системы (19.1) не исправляют положения, что показывает пример следующей системы: $x\in\mathbf{R}$, $x>0$, $-x>0$. Если же $n\geqslant 2$ и множество A конечно, то для любого как угодно малого $\varepsilon>0$ существует коррекция системы (19.1) вида $a\to a+\Delta a$, $\|\Delta a\|\leqslant\varepsilon$, при которой система

$$(a+\Delta a,x)>0\quad\forall a\in A\tag{19.2}$$

обладает комитетом. Однако в этом случае встает вопрос об устойчивости системы (19.2): не будут ли при близких друг к другу коррекциях получаться существенно различные комитеты?

Этот вопрос важен не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Например, если в практической задаче распознавания образов — задаче дискриминантного анализа, приводимой к виду (19.1),— информация противоречива, то необходима ее коррекция, причем такая, что разбиение пространства на образы будет устойчивым.

Приведем следующий пример в $\mathbf{R}^2$:

$$x_1+x_2>0,\quad -x_1-x_2>0.$$

Возможны два вида коррекции: при первом из них рассматриваем систему

$$(1+\varepsilon)x_1+(1+\delta)x_2>0,\qquad -x_1-x_2>0,$$

при втором — отбрасываем одно из неравенств противоречивой пары. Легко убедиться, что оба вида коррекции неустойчивы в данном примере.

Пример устойчивости коррекций дается следующей системой:

$$-x_1-x_2>0,\quad x_2>0,\quad x_1>0,\quad -x_1>0,$$

где неравенства $x_1>0$, $-x_1>0$ составляют противоречивую пару.

Рассмотрим еще пример противоречивой задачи дискриминантного анализа с разными способами ее разрешения. Пусть A, $B\subset\mathbf{R}$ — множества, для которых надо построить разделяющий их комитет аффинных функций φ:

$$A=\{1,\ 2\},\quad B=\{-1,\ 2,\ 3\},\quad \varphi(a)=(a,\ x)+y.$$

Система относительно коэффициентов разделяющей функции такова:

$$x+y>0,\quad 2x+y>0,\quad -x+y<0,$$
$$2x+y<0,\quad 3x+y<0.$$

Рассмотрим решения совместных подсистем этой системы, а также пару противоположных векторов, лежащих на прямой $2x+y=0$, отвечающей противоречивой паре неравенств:

$$a=[-2,\ 3],\quad b=[-1,\ 2],\quad c=[-2,\ 5],$$
$$d=[1,\ 0],\quad e=[1,\ -2],\quad f=[0,\ -1].$$

Из этих точек будем составлять коллективы функций, принимающих большинством голосов решение о принадлежности точки к образу A (большинство значений функций в этой точке положительны) и к образу B (большинство значений отрицательны):

$$K_1=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\},\quad K_2=\{a,\ c,\ d,\ f\},$$
$$K_3=\{b,\ d,\ f\},\quad K_4=\{a,\ c,\ d,\ e,\ f\},$$
$$K_5=\{b,\ d,\ f\},\quad K_6=\{a,\ d,\ f\},\quad K_7=\{c,\ d,\ f\}.$$

Здесь каждый коллектив K_i состоит из векторов коэффициентов входящих в него функций; этот коллектив определяет некоторый вариант принятия решений.

Эти варианты решений соответствуют разным видам коррекций. Сравнение соответствующих разбиений пространства $\mathbf{R}$ показывает их некоторую близость друг к другу.

19.4. Устойчивые коррекции комитетной дискриминации. Рассмотрим систему

$$(c_j,x)>0\quad \forall j\in \mathbf{N}_m,\quad (d,x)>0,\quad (-d,x)>0 \qquad (19.3)$$

при условии, что множества $\{c_1,\ \ldots,\ c_m,\ d\}$ и $\{c_1,\ \ldots,\ c_m,\ -d\}$ — без противоречий. Система (19.3) не обладает комитетом. Возьмем следующие варианты допустимых коррекций:

1) Система (19.3) заменяется системой

$$(c_j,\ x)>0\quad \forall j\in \mathbf{N}_m. \qquad (19.4)$$

2) Система (19.3) заменяется системой

$$(c_j, x) > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \quad (d+e, x) > 0, \quad (-d, x) > 0, \tag{19.5}$$

где $\|e\| = \varepsilon > 0$ — достаточно малое число, а множество $\{c_1, \ldots, c_m, d+e, -d\}$ — без противоречий.

3) Система (19.3) заменяется системой

$$(c_j, x) > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \quad (d, x) > 0. \tag{19.6}$$

Исследуем устойчивость комитетных конструкций (таких, как комитеты, максимальные совместные подсистемы, минимальные несовместные подсистемы) и соответствующих разбиений пространства при этих коррекциях.

Теорема 19.1. *Если комитет системы* (19.4) *существует, то он устойчив. Комитетные конструкции системы* (19.4) *устойчивы тогда и только тогда, когда множество* $C = \{c_j\colon j = 1, \ldots, m\}$ — *без противоречий.*

Доказательство. Согласно [51], необходимое и достаточное условие существования комитета системы (19.4) состоит в том, что множество C — без противоречий. Пусть $K = \{x_1, \ldots, x_q\}$ — комитет системы (19.4). Положим $K_j = \{x \in K\colon (c_j, x) > 0\}$. По определению комитета, $|K_j| > q/2$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$. Если $\|e_j\| \leqslant \varepsilon$, то при достаточно малом ε и любом $x \in K$ имеем $(c_j, x) > 0 \Rightarrow (c_j + e_j, x) > 0$. Поэтому $K_j \subset \{x \in K\colon (c_j + e_j, x) > 0\}$; следовательно, K — комитет системы $(c_j + e_j, x) > 0$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$.

Теорема 19.2. *Пусть* $H = \{x\colon (d, x) = 0\}$, $n > 2$. *Если* $\operatorname{cone} C \cap \operatorname{cone}\{d, -d\} = \{0\}$, *где* $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, *то существует комитет* K *системы* (19.4), *лежащий в гиперплоскости* H.

Доказательство. Пусть $(c_j, x) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$. Так как $d \neq 0$, то можно, не нарушая общности, положить: $d = [d_1, \ldots, d_n]$, $d_1 \neq 0$, и более того, что $d_1 = -1$. Тогда $x_1 = d_2x_2 + \ldots + d_nx_n$. Для существования комитета, лежащего в H, нужно, чтобы существовал комитет системы

$$(a_{j2} + d_2a_{j1})\,x_2 + \ldots + (a_{jn} + d_na_{j1})\,x_n > 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m,$$

т. е. чтобы множество

$$\{c_j' = [a_{j2} + d_2a_{j1}, \ldots, a_{jn} + d_na_{j1}]\colon j = 1, \ldots, m\}$$

было без противоречий. Убедимся в том, что это условие выполняется, методом от противного. Пусть либо существует такое j, что $c'_j = 0$, либо существуют i, j и $\lambda > 0$ такие, что $c'_i = -\lambda c'_j$.

Рассмотрим первое предположение: $a_{j2} + d_2 a_{j1} = 0, \ldots$ $\ldots, a_{jn} + d_n a_{j1} = 0$, откуда

$$[a_{j2}, \ldots, a_{jn}] = -a_{j1}[d_2, \ldots, d_n], \quad a_{j1} = (-a_{j1})(-1),$$

т. е. $c_j = -a_{j1}d$, что противоречит условиям теоремы.

Рассмотрим второе предположение:

$$[a_{i2} + d_2 a_{i1}, \ldots, a_{in} + d_n a_{i1}] = -\lambda[a_{j2} + d_2 a_{j1}, \ldots, a_{jn} + d_n a_{j1}],$$

т. е.

$$[a_{i2}, \ldots, a_{in}] + a_{i1}[d_2, \ldots, d_n] = \\ = -\lambda([a_{j2}, \ldots, a_{jn}] + a_{j1}[d_2, \ldots, d_n]).$$

Отсюда

$$[a_{i2}, \ldots, a_{in}] + \lambda[a_{j2}, \ldots, a_{jn}] = -[a_{i1} + \lambda a_{j1}][d_2, \ldots, d_n].$$

Кроме того, $a_{i1} + \lambda a_{j1} = -(a_{i1} + \lambda a_{j1})(-1)$, т. е. $c_i + \lambda c_j = \mu d$ для некоторого μ. Так как C — без противоречий, то $c_i + \lambda c_j \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0$. Далее, $c_i + \lambda c_j \in \operatorname{cone} C$, $\mu d \in \operatorname{cone}\{d, -d\}$, и мы вновь получаем противоречие с условием теоремы.

Замечание 19.1. Из доказательства теоремы 19.2 видно, что условия теоремы можно значительно ослабить, так как требуется лишь, чтобы

$$c_j \neq -a_{j1}d \quad \forall j \in \mathrm{N}_m,$$
$$c_i + \lambda c_j \neq -(a_{i1} + \lambda a_{j1})\, d \quad \forall i, j \in \mathrm{N}_m, \quad \forall \lambda > 0.$$

В связи с теоремой 19.2 комитет K системы (19.4), лежащий в H, остается комитетом при следующей коррекции системы (19.3): $(d, x) > 0$ заменяется на $(d, x) + \varepsilon(c_1, x) > 0$; $-(d, x) > 0$ заменяется на $-(d, x) + \varepsilon(c_2, x) > 0$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Ясно, что можно было бы положить $(d, x) + \varepsilon(c_i, x) > 0$, $(-d, x) + \varepsilon(c_j, x) > 0$ для любых $i \neq j$.

Теорема 19.3. *Комитет $K \subset H$ системы* (19.4) *является комитетом системы*

$$(c_j, x) > 0 \quad \forall j \in \mathrm{N}_m,$$
$$(d, x) + \varepsilon(c_1, x) > 0, \quad (-d, x) + \varepsilon(c_2, x) > 0,$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Доказательство. Пусть $K_1 \subset K$, $|K_1| > |K|/2$, $K_2 \subset K$, $|K_2| > |K|/2$, причем все элементы множества K_1 удовлетворяют неравенству $(c_1, x) > 0$, а все элементы K_2 — неравенству $(c_2, x) > 0$. Тогда, поскольку $K_1, K_2 \subset H$, то

$$K_1 \subset \{x\colon\ (d, x) + \varepsilon(c_1, x) > 0\},$$
$$K_2 \subset \{x\colon\ (-d, x) + \varepsilon(c_2, x) > 0\},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 19.2. Коррекция, указанная в теореме 19.3, является, очевидно, устойчивой.

19.5. Схема комитетной дискриминации k образов, инвариантная к упорядочению образов. Рассмотрим случай $k = 3$. Материал обучения: $A, B, C \subset \mathbf{R}^n$. Строим функции $f_1(a) = (a, x)$, $f_2(b) = (b, y)$, $f_3(z) = (c, z)$ такие, чтобы

$$f_1(a) = \max_{i=1,2,3} f_i(a) \quad \forall a \in A,$$
$$f_2(b) = \max_{i=1,2,3} f_i(b) \quad \forall b \in B,$$
$$f_3(c) = \max_{i=1,2,3} f_i(c) \quad \forall c \in C.$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} (a, x) - (a, y) &> 0 \quad \forall a \in A,\\ (a, x) - (a, z) &> 0 \quad \forall a \in A,\\ -(b, x) + (b, y) &> 0 \quad \forall b \in B,\\ (b, y) - (b, z) &> 0 \quad \forall b \in B,\\ -(c, x) + (c, z) &> 0 \quad \forall c \in C,\\ -(c, y) + (c, z) &> 0 \quad \forall c \in C. \end{aligned} \tag{19.7}$$

В существенных для практики случаях система (19.7) несовместна. Рассмотрим условия существования разделяющего комитета. Системе (19.7) соответствует множество $\mathscr{P}$ векторов коэффициентов ее левых частей (в $\mathbf{R}^{3n}$): $[a, -a, 0]$ $(a \in A)$, $[a, 0, -a]$ $(a \in A)$, $[-b, b, 0]$ $(b \in B)$, $[0, b, -b]$ $(b \in B)$, $[-c, 0, c]$ $(c \in C)$, $[0, -c, c]$ $(c \in C)$. Для существования комитета системы (19.7) необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathscr{P}$ было без противоречий. Итак, получаем следующее условие существования разделяющего комитета.

Теорема 19.4. *Для того чтобы существовал комитет системы* (19.7), *необходимо и достаточно, чтобы множества A, B, C, каждое в отдельности, были без противоре-*

чий и чтобы всякая пара векторов вида $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$ *не была одинаково направленной* ($a \in A$, $b \in B$, $c \in C$). *Отсюда, в частности, следует, что в* $\mathbf{R}$ *система* (19.7) *не имеет комитета, если* $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$. *В* $\mathbf{R}^n$ *при* $n \geqslant 2$ *путем как угодно малых изменений информации можно добиться того, что* (19.7) *будет обладать комитетом.*

19.6. Парадокс голосования. Рассмотрим известный [103] *парадокс голосования* (нетранзитивность предпочтений, устанавливаемых по принципу большинства) в связи с методом комитетов [51] в распознавании образов. Дело в том, что метод комитетов корректно решает задачу дискриминантного анализа и задачу прогнозирования классификации объектов, не вошедших в материал обучения, однако использование комитетного решающего правила для установления предпочтений между классифицируемыми объектами должно быть ограничено некоторыми условиями.

Рассматриваемый парадокс состоит в следующем [103]. Если предпочтение $a \succ b$ устанавливается с помощью механизма голосования, то оно может быть нетранзитивным, т. е. возможна ситуация $a \succ b \succ c \succ a$.

Если комитет [51], построенный для разделения двух множеств A и B, использовать не только в качестве инструмента классификации, но и для установления предпочтений, то он будет обладать указанным недостатком. Однако классификация будет корректной, т. е.

$$\mathfrak{A} = \{x\colon\ xK0\} \supset A, \quad \mathfrak{B} = \{x\colon\ 0Kx\} \supset B, \quad \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \varnothing. \tag{19.8}$$

Здесь aKb означает, что неравенство $(a, x) > (b, x)$ справедливо для большинства $x \in K$.

Таким образом, разделяющий комитет корректно решает задачу распознавания образов, но при его использовании для установления предпочтений требуется определенная осторожность. Приведем пример. Пусть $A = \{[1, 1], [-1, 0]\}$, $B = \{[0, 1]\} \subset \mathbf{R}^2$. Множество $K = \{x, y, z\}$, где $x = [-1, -1]$, $y = [-1, 2]$, $z = [2, -1]$, есть разделяющий A и B комитет, т. е. комитет системы $(a, h) > 0\ \forall a \in A$, $(b, h) < 0\ \forall b \in B$. Очевидно, соотношения (19.8) выполняются. Найденный комитет K, однако, устанавливает нетранзитивное предпочтение для элементов $u = [1, 1]$, $v = [0, 0]$, $w = [1, 0]$: $uKvKwKu$. Это видно из таблицы, где в клетках расположены значения соответствующих скалярных произведений:

K	$x=[-1, -1]$	$y=[-1, 2]$	$z=[2, -1]$
$u=[1, 1]$	-2	1	1
$v=[0, 0]$	0	0	0
$w=[1, 0]$	-1	-1	2

Рассмотрим далее следующие вопросы:

1) вид множеств A и B, для которых существует разделяющий их линейный комитет с нетранзитивным предпочтением;

2) частота ситуаций нетранзитивных цепочек предпочтений.

Противоречивым (K, r)-*циклом* назовем упорядоченное множество $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset \mathbf{R}^n$ такое, что

$$u_1Ku_2K \ldots Ku_rKu_1. \tag{19.9}$$

Теорема 19.5. *Для того чтобы существовал комитет K, для которого множество $\{u_1, \ldots, u_r\}$ было бы противоречивым (K, r)-циклом, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{u_1-u_2, u_2-u_3, \ldots, u_{r-1}-u_r, u_r-u_1\}$ было без противоречий.*

Доказательство легко следует из теоремы о существовании линейного комитета [51].

Пусть выполняются условия (19.8) и (19.9), т. е. разделяющий A и B комитет таков, что $\{u_1, \ldots, u_r\}$ есть противоречивый (K, r)-цикл. Это означает, что K — комитет, разделяющий множества $A \cup \{u_1-u_2, \ldots, u_{r-1}-u_r, u_r-u_1\}$ и B, или комитет системы

$$(a, x)>0 \quad \forall a \in A, \quad (b, x)<0 \quad \forall b \in B,$$
$$(u_1-u_2,\ x)>0,\ \ldots,\ (u_{r-1}-u_r,\ x)>0,\ (u_r-u_1,\ x)>0.$$

Для существования такого комитета необходимо и достаточно, чтобы множество $A \cup (-B) \cup \{u_1-u_2, \ldots, u_{r-1}-u_r, u_r-u_1\}$ было без противоречий. Отсюда следует, что для любых двух конечных множеств A и B существует разделяющий их линейный комитет с нетранзитивным предпочтением. Этим вопрос 1) исчерпывается.

В дальнейшем понадобится понятие *всесторонней системы векторов*: это такое множество, что его векторы находятся по обе стороны любой гиперплоскости, проходящей через 0.

Теорема 19.6. *Для существования противоречивого (K, r)-цикла необходимо и достаточно существования подпространства $\mathfrak{L} \subset \mathbf{R}^n$ такого, что $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}$ всесторонне в $\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{A} = \{x\colon xK0\}$.*

Необходимость. Пусть $(x_1, \ldots, x_r)$ — противоречивый (K, r)-цикл. Тогда

$$x_2 - x_1 \in \mathfrak{A}, \quad x_3 - x_2 \in \mathfrak{A}, \ldots$$
$$\ldots, x_r - x_{r-1} \in \mathfrak{A}, \quad x_1 - x_r \in \mathfrak{A}. \qquad (19.10)$$

Соотношения (19.10) перепишем в виде

$$x_2 - x_1 = u_1, \quad x_3 - x_2 = u_2, \ldots$$
$$\ldots, x_r - x_{r-1} = u_{r-1}, \quad x_1 - x_r = u_r, \qquad (19.11)$$

где $u_1, \ldots, u_r \in \mathfrak{A}$. Складывая все уравнения (19.11), кроме первого, получаем: $x_1 - x_2 = u_2 + \ldots + u_r$. Отсюда и из оставшегося уравнения следует, что ненулевой вектор $y = x_1 - x_2$ таков, что и y, и $-y$ представляются неотрицательными линейными комбинациями векторов $u_1, \ldots, u_r \in \mathfrak{A}$. Следовательно, система $\{u_1, \ldots, u_r\}$ — всесторонняя в некотором подпространстве $\mathfrak{L}$.

Достаточность. Пусть $u_1, \ldots, u_{n+1}$ — всесторонняя подсистема в $\mathfrak{L}$, причем $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} \subset \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}$. Пусть $x, y \in \mathfrak{L}$, $x \neq y$. В силу условия всесторонности имеют место разложения

$$x - y = \sum_{l=1}^{R+1} \alpha_{i_l} u_{i_l}, \quad y - x = \sum_{s=1}^{P+1} \beta_{j_s} u_{j_s},$$

где $\alpha_{i_l} > 0$, $\beta_{j_s} > 0$. Тогда в силу $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} \subset \mathfrak{A}$ имеем

$$xK\left(x + \beta_{j_1} u_{j_1}\right) K \left(x + \beta_{j_1} u_{j_1} + \beta_{j_2} u_{j_2}\right) K \ldots$$
$$\ldots K \left(x + \sum_{s=1}^{P+1} \beta_{j_s} u_{j_s}\right) = yK\left(y + \alpha_{i_1} u_{i_1}\right) K \ldots$$
$$\ldots K \left(y + \sum_{l=1}^{R+1} \alpha_{i_l} u_{i_l} = x\right),$$

т. е. цикл

$$\left\{x, x + \beta_{i_1} u_{i_1}, \ldots, y, y + \alpha_{j_1} u_{j_1}, \ldots, y + \sum_{l=1}^{R+1} \alpha_{j_l} u_{j_l} = x\right\}$$

противоречив, что и требовалось.

Следствие 19.1. *Если множество $\mathfrak{A} = \{x\colon xK0\}$ — всестороннее, то для некоторого r существует противоре-*

чивый (K, r)*-цикл. В частности, он существует для* $r \leqslant 2(n+1)$, *где* n — *размерность пространства.*

Отметим, что в доказательстве теоремы содержится и алгоритм построения противоречивых циклов, и описание множества всех таких циклов.

Итак, для отношения предпочтения, устанавливаемого с помощью разделяющего множества A и B комитета, построенного с целью классификации, нарушается требование транзитивности.

Однако, если специально рассмотреть в качестве исходной задачи не задачу классификации, а задачу моделирования предпочтения, то существует ее точное решение с помощью метода комитетов. Действительно, рассмотрим бинарное отношение aPb, задаваемое множеством пар векторов $\mathscr{P} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$:

$$aPb \Leftrightarrow [a, b] \in \mathscr{P}.$$

Предположим, что множество $\mathscr{P}$ не задано, а судить о нем мы можем по заданным множествам Q_1 и Q_2 прецедентов: $Q_1 \subset \mathscr{P}$, $Q_2 \cap \mathscr{P} = \varnothing$. С целью моделирования множества $\mathscr{P}$ полупространством $\{c\colon (c, x) > 0\}$ составим систему линейных неравенств

$$(c, x) > 0 \quad \forall c \in Q_1, \qquad (c, x) < 0 \quad \forall c \in Q_2. \tag{19.12}$$

Система (19.12) может оказаться несовместной, но обладать комитетом при условии, что в множестве $Q_1 \cup (-Q_2)$ нет нулевых элементов и противоположно направленных пар векторов [51].

Пусть $K = \{x_1, \ldots, x_q\}$ — комитет системы (19.12); $K \subset \mathbf{R}^{2n}$, $x_i = [y_i, z_i]$; $y_i, z_i \in \mathbf{R}^n$. Полагаем $aPb \Leftrightarrow (a, y_i) + (b, z_i) > 0$ для большинства номеров $i \in \mathbf{N}_q$. Квантор «для большинства» далее будем обозначать W, так что

$$aPb \Leftrightarrow (a, y_i) + (b, z_i) > 0 \quad \mathsf{W} i \in \mathbf{N}_q.$$

Это правило корректно в том смысле, что

$$\{[a, b]\colon aPb\} \supset Q_1, \quad \{[a, b]\colon aPb\} \cap Q_2 = \varnothing.$$

Однако следование

$$aPb \;\&\; bPc \Rightarrow aPc \tag{19.13}$$

выполняется не всегда.

Приведем пример, в котором (19.13) не выполняется, т. е. не выполняется соотношение

$$\begin{aligned} (a, y_i) + (b, z_i) > 0 \quad \mathsf{W} i \in \mathbf{N}_q, \\ (b, y_i) + (c, z_i) > 0 \quad \mathsf{W} i \in \mathbf{N}_q, \\ (a, y_i) + (c, z_i) > 0 \quad \mathsf{W} i \in \mathbf{N}_q, \end{aligned}$$

где W — квантор «для большинства». Пусть $n = 1$, $Q_1 = \{[-1, 2], [4, 3]\}$, $Q_2 = \{[2, 3]\}$, т. е. $-1P2$, $4P3$, $3P2$. Разделяющий множества Q_1 и Q_2 комитет имеет вид

$$K = \{[y_1, z_1] = [1, 1], [y_2, z_2] = [1, -1], [y_3, z_3] = [-3, 1]\}.$$

Положим $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Тогда aPb, bPc, cPa, т. е. имеет место нетранзитивность.

Условия нетранзитивности могут быть получены аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 19.2.

Один из путей избежания противоречия нетранзитивности может быть в рассмотрении отношения $\mathscr{P}$ лишь на части пространства $\mathbf{R}^n$. В этом случае может рассматриваться задача нахождения комитета, моделирующего отношение предпочтения по прецедентам, транзитивное на множестве M.

С моделированием предпочтений связана и другая задача — отыскания такого комитета, что индуцируемое им правило обладает следующим свойством: если aPb, то не bPa, т. е. предпочтение является строгим. В этом случае требуется найти такой комитет K системы

$$\begin{aligned} (a, y) + (b, z) > 0 \quad \forall [a, b] \in Q_1, \\ (a, y) + (b, z) < 0 \quad \forall [a, b] \in Q_2, \end{aligned}$$

что при $a \neq b$ система

$$\begin{aligned} (a, y) + (b, z) > 0 \quad \mathsf{W} [y, z] \in K, \\ (b, y) + (a, z) > 0 \quad \mathsf{W} [y, z] \in K \end{aligned}$$

несовместна.

§ 20. Комитетное решение несобственных задач оптимизации

Постоянное расширение области приложений математического программирования вызывает необходимость в последовательном изучении и несобственных задач оптимизации. Поскольку одним из подходов к анализу несовместных систем соотношений является изучение комитетных конструкций таких систем, то возникает вопрос об их содержательной интерпретации для различных конкретных областей приложений.

Речь идет об интерпретации и применении таких конструкций, как тупиковые подсистемы (минимальные несовместные и максимальные совместные), наборы решений некоторых совместных подсистем, системы представителей множеств решений этих подсистем, p-комитеты. Сферой естественного и успешного приложения таких конструкций в задачах оптимизации является идентификация модели математического программирования, комбинированные процедуры оптимизации, включающие блоки распознавания образов. В этом случае комитетные конструкции применяются для систем соотношений, связывающих функции как элементы функциональных пространств.

Совсем другой смысл приобретают комитетные конструкции в применении к несовместным системам ограничений на вектор состояния x в задаче математического программирования.

Исследование несовместных систем ограничений с помощью выделения всего множества максимальных совместных подсистем или некоторой его части полезно не только в случае задач распознавания образов, но и в более широкой сфере задач исследования операций. Такой подход допускает большое число различных интерпретаций, что и обеспечивает его широкую применимость. В частности, комитетные конструкции позволяют строить корректные решающие правила на базе совокупности некорректных решающих правил. Далее, названный подход позволяет строить комбинированные методы математического программирования, включающие блок распознавания образов для учета плохо формализуемых ограничений; эти методы являются частью нестационарных процедур оптимизации [38]. Это обстоятельство позволяет развивать пакет «КВАЗАР» прикладных программ распознавания образов [59], использующий некоторые комитетные конструкции, в направлении реализации подобных комбинированных методов принятия решений.

В целом сфера приложения комитетных конструкций определяется тем, что они могут интерпретироваться как:

— стохастические, «размытые» решения задач исследования операций;

— компромиссные решения в задачах с многокритериальностью и с несовместной системой ограничений;

— смешанные стратегии использования решений совместных подсистем системы ограничений;

— решающее правило в задачах принятия решений.

20.1. Некоторые причины противоречий в математических моделях. Предположим, что некоторую реальную или идеальную ситуацию (объект) мы отражаем моделью

$$x \in D_j \quad \forall j \in I, \quad x \in X, \tag{20.1}$$

где x — вектор состояния объекта, X — множество всех мыслимых векторов состояния, D_j — множество всех векторов, допустимых по j-му ограничению. Множество D_j может иметь вид

$$D_j = \{x \in X\colon\ f_j(x) \leqslant b_j\},$$

где f_j: $X \to \mathbf{R}$, $b_j \in \mathbf{R}$. Система (20.1) может быть несовместной (т. е. соответствующая модель — противоречивой) по следующим причинам.

1. Ограничение $x \in D_j$ является чрезмерной абсолютизацией, упрощением, ужесточением или просто неточным отражением некоторого действительного требования (например, оно представляет собой линеаризацию нелинейного ограничения).

2. Требование одновременного выполнения всех соотношений системы (20.1) — абсолютизация некоторого более слабого условия на выполнимость ограничений.

3. Вектор состояния x имеет слишком малую размерность, так что в модели не учтены измерения многих важных факторов состояния.

4. Система (20.1) состоит из нескольких подсистем. Каждая подсистема отражает соотношения некоторой теории, и их «стыковка» приводит к противоречивой модели. Противоречивые системы иногда возникают при получении данных новых экспериментов — они могут противоречить соотношениям теории, описывающей результаты предыдущих экспериментов.

Противоречия типа противоречий стыковки возникают и в моделях согласования требований, поступающих из различных источников.

5. Модель отражает несовместимые друг с другом требования нескольких лиц, или является сведе́нием многокритериальной задачи к задаче, где все целевые критерии, кроме одного, переработаны в ограничения.

6. База данных в информационной системе может содержать противоречивые сведения, когда допускается доступ к ней нескольких лиц.

7. Заготовленная заранее теоретическая структура накладывается на реально возникшую ситуацию моделирования.

20.2. Способы анализа несовместных систем. Способы преодоления противоречивых ситуаций моделирования связаны с причинами возникновения таких ситуаций. Так, некоторые противоречия исчезают, если расширить применяемый класс средств моделирования; например, при введении средств отражения динамики, при расширении пространства признаков. Другие способы исключения противоречий основаны на тех или иных обобщениях понятия решения: например, на введении коллективных или «размытых» решений, таких, как p-комитеты. Далее, противоречий можно избежать, если сузить сферу действия модели, запретить неоправданно широкую ее применимость.

Все эти способы исключения противоречий можно проиллюстрировать на примере задач нахождения инвариантов в эмпирическом материале, задач построения эмпирических зависимостей, задач интерпретации материала наблюдений.

20.3. Сфера применения комитетных конструкций. Если формальная система, в которой мы отражаем реальный объект, фиксирована, то при увеличении глубины отражения мы получаем противоречия. Такие противоречия можно разрешать с помощью использования комитетных конструкций, соответствующих получаемым противоречивым системам соотношений.

При этом каждой максимальной совместной подсистеме противоречивой системы соотношений соответствует допустимый, конструируемый (в рамках данной модели) объект. Саму систему соотношений можно интерпретировать как каталог требований на обеспечение набора каких-либо функций некоторыми объектами. Комитетные конструкции позволяют получать более широкий спектр возможностей при ограниченных ресурсах.

Однако полезность применения комитетных конструкций в анализе противоречивых моделей (при стыковке теорий, попытке описания новых факторов в рамках старой модели, в рамках неадекватно простой модели и т. д.) является, по-видимому, ограниченной и требует специальных исследований. Можно отметить, что полезность комитетных конструкций и их интерпретация достаточно наглядны в ситуации многократного принятия решений в противоречивых условиях. При этом практические комитетные решения могут принимать вид распределений, диктующих частоту применения решений различных типов в одной и той же противоречивой ситуации.

Применимость и большая полезность комитетных конструкций совершенно ясны в моделях, экстраполирующих результаты эмпирических наблюдений на более широкую область (как, например, в моделях распознавания образов).

Первоначальной сферой приложений комитетов была сфера задач распознавания образов. Так, например, комитетные решения применимы в математических методах классификации, являясь средством создания образа или обобщенного представления о большом множестве данных $M \subset \mathbf{R}^n$, т. е., например, отыскания такого $P \in \mathscr{P}$, $P \subset \mathbf{R}^n$, что $P \supset M$. Если имеется альтернативный класс N, то $P \supset M$, $P \cap N = \varnothing$, $P \in \mathscr{P}$. Комитет применяется в случае несовместности этих систем соотношений.

Переходя к экономическим приложениям комитетных конструкций, отметим, что с ними связано применение решающего правила вместо плана.

20.4. Решающее правило вместо плана. Пусть задача оптимизации задана определяющей информацией; например, задача линейного программирования

$$\max \{c^T x\colon\ Ax \leqslant b\}$$

задана информацией $s = \{A,\ b,\ c\}$. Если задача несобственная, то в некоторых случаях мало смысла предлагать какой-либо приближенный план (например, чебышевское приближение), так как несобственность может возникнуть по той причине, что не все еще сказано об условиях задачи, о том, что считать решением,— задача не определена. Например, может оказаться, что выполнение некоторых ограничений обязательно, за невыполнение других берется штраф, непрерывно зависящий от невязки, за невыполнение третьих берется кусочно-постоянный штраф (при достижении невязкой порогового значения присходит скачок штрафа), остальные неравенства эластичны и ранжированы по степени желательности их выполнения, а некоторые ограничения «размыты» и т. д.

Все подобные дополнительные соображения, доопределяющие задачу, можно считать экспертной информацией E. Не имея такой информации, можно заранее заготовить некоторое множество K планов и далее руководствоваться отображением $\{A, b, c, E\} \to K$. Это отображение есть решающее правило, которое может быть построено методами распознавания образов (например, методом комитетов).

Доопределение задачи необходимо и в случае многокритериальной оптимизации; один из способов организации решения такой задачи состоит в комбинировании планов, каждый из которых удовлетворяет какой-либо вспомогательной подзадаче, например, задаче с одним критерием. В этом случае в качестве комбинации планов может рассматриваться не только операция сведения всех вспомогательных планов к одному (например, взятие выпуклой комбинации), но и комитетные конструкции планов. Существуют подходы, когда окончательный план из вспомогательных планов назначается решением арбитра. Это близко к понятию вероятностного комитета, члены которого выбираются с определенными вероятностями.

20.5. Непрерывные и дискретные аппроксимации моделей оптимизации. Рассмотрим задачу математического программирования: найти наибольшее значение функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве всех решений системы неравенств

$$f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{20.2}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbf{R}^n$. Вектор x может интерпретироваться как вектор состояния проектируемого обьекта, а его координата x_i — как значение i-го параметра состояния.

Введем обозначения: $M = \{x \in \mathbf{R}^n \colon f_j(x) \leqslant b_j,\ j = 1, \ldots, m\}$ — допустимое множество задачи; $M_j = \{x\colon f_j(x) \leqslant b_j\}$ — множество векторов $x \in \mathbf{R}^n$, допустимых по j-му ограничению; $\mu = \sup \{f(x)\colon x \in M\}$ — оптимальное значение задачи; $\tilde{M} = \{x \in M\colon f(x) = \mu\}$ — оптимальное множество, т. е. множество всех оптимальных векторов.

Если решение рассматриваемой задачи

$$\sup \{f(x)\colon x \in M\} \tag{20.3}$$

не существует, т. е. $\tilde{M} = \varnothing$ либо ввиду $\mu = +\infty$, либо ввиду недостижимости на M оптимального значения, хотя оно и конечно, либо ввиду $M = \varnothing$, то в соответствии с содержательным смыслом задачи могут быть использованы различные варианты обобщения понятий допустимого и оптимального векторов.

Для широкого круга практических задач естественными обобщениями понятия решения являются [25] чебышевское уклонение

$$E = \inf\{t \geqslant 0\colon\ f_j(x) \leqslant b_j + t,\ j = 1, \ldots, m\}$$

и чебышевское приближение

$$y \in \{x\colon\ f_j(x) \leqslant b_j + E,\ j = 1, \ldots, m\},$$

связанные с непрерывной аппроксимацией исходной задачи (20.3). Однако в ряде случаев практическая интерпретация несобственной задачи требует применения *дискретных аппроксимаций* типа «размытых» решений или комитетных конструкций [51], например, когда необходимо вовлекать в рассмотрение совокупности векторов x_J, каждый из которых является допустимым лишь по некоторой подсистеме J условий: $x_J \in \bigcap\limits_{j \in J} M_j$. Так, например, можно рассматривать комитеты для системы множеств $\{M_j\colon\ j = 1, \ldots, m\}$, т. е. такие множества K, что $|K \cap M_j| > |K \setminus M_j|$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$. Такие конструкции применимы и к многокритериальным задачам принятия решений для ситуаций с повторяющимся выбором.

По-видимому, применение комитетных конструкций оправдано и в тех случаях, когда источником несобственности задачи выступает возможность одновременного доступа нескольких пользователей к большой базе данных. В таких ситуациях база данных (информационная составляющая) $s = \{f, f_1, \ldots, f_m, b_1, \ldots, b_m\}$ задачи (20.3) может содержать либо несовместные данные (ограничения на допустимость векторов состояний и др.), либо обладать каким-либо другим свойством несогласованности.

Отметим, что непрерывность или дискретность аппроксимации связаны с непрерывностью или разрывностью штрафной функции за невыполнение ограничений.

Разумеется, можно рассматривать понятие несобственной задачи в более широком смысле, поскольку такие задачи возникают не только в сфере оптимизации, но и во многих других областях: в распознавании образов, в моделях идентификации и т. д. Типичными примерами несобственных задач могут служить неопределенные задачи обработки результатов наблюдений, не имеющие решения в обычном смысле.

Приведем соображения относительно некоторых свойств комитетных конструкций, способствующих их успешному применению.

1. Комитетные конструкции существуют при весьма слабых предположениях относительно условий задачи. Так, например, для существования комитета аффинных функций, разделяющего конечные множества A и B в пространстве $\mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы $A \cap B = \varnothing$. При этом имеются оценки числа членов комитета, позволяющие оценить объем памяти, требуемый для метода комитетов [49].

2. Конструкция минимального (по числу членов) комитета системы неравенств тесно связана с анализом множества всех максимальных совместных подсистем этой системы; этот анализ имеет большое теоретическое значение.

3. Комитетные конструкции позволяют строить корректные решающие правила на базе совокупности некорректных эвристических правил.

4. Задача дискриминантного анализа является обратной в широком понимании этого термина. Обычно задачи такого типа бывают некорректными, т. е. могут иметь некоторые из следующих особенностей: а) отсутствие решения (несовместность); б) неоднозначность решения; в) неустойчивость решения. Задачи дискриминантного анализа обычно обладают свойствами а) и б). Метод комитетов позволяет справляться с трудностями, вытекающими из свойства а). Свойство б) может быть исключено с помощью введения критерия оптимизации разделения множества.

Построение минимального (по числу членов) комитета системы линейных неравенств

$$Ax > 0, \tag{20.4}$$

где A — $(m \times n)$-матрица, x — n-мерный вектор-столбец, связано с рассмотрением двойственной системы $yA = 0$, $y \geqslant 0$, где y — m-мерная вектор-строка. Именно, анализ двойственной системы, проводимый согласно методу свертывания [90], позволяет выделить все минимальные несовместные, а затем и все максимальные совместные подсистемы системы (20.4). На этой основе можно построить полугруппу эффективных комитетов системы (20.4), т. е. таких комитетов, что все их члены суть решения некоторых максимальных совместных подсистем; наличие такой алгебраической структуры в множестве эффективных комитетов позволяет выделять оптимальные в том или ином смысле комитеты.

20.6. Применение комитетных конструкций в несобственных задачах. Обычное понятие оптимального вектора задачи

$$\sup \{f(x):\ x \in M\} \tag{20.5}$$

неприменимо к несобственным задачам оптимизации. В этом случае можно применять понятие «размытого» решения, т. е. некоторого множества $K \subset \mathbf{R}^n$, обладающего теми или иными свойствами, полезными с точки зрения содержательного смысла, вкладываемого в задачу (20.5). Комитетные конструкции [51] являются некоторыми из возможных реализаций понятия размытого решения.

Если множество M, задаваемое как множество всех решений некоторой системы ограничений $f_j(x) \leqslant 0 \quad \forall j \in J$, $x \in X$, является пустым, то в задачу (20.5) можно вкладывать смысл максимизации $f(x)$ на максимальных совместных подсистемах системы.

Существует классическая простейшая математическая модель, употребляемая в задачах планирования и управления: вектор состояния. Обобщением ее является комитетное состояние. Комитетные состояния суть такие векторы, часть координат (или все координаты) которых заданы неточно, в соответствии с каким-то законом распределения, и подчиняются тому или иному требованию (например, математическое ожидание выполнения j-го неравенства больше чем p_j, и т. д.).

В случае, если система состоит из директивных и факультативных ограничений, рассматриваемая задача модифицируется: надо проводить максимизацию целевого функционала на максимальных совместных подсистемах, включающих подсистему всех директивных ограничений (естественно предполагать ее совместной).

Если же несобственность задачи (20.5) состоит в том, что ее оптимальное множество пусто, т. е. $\widetilde{M} = \varnothing$, то можно использовать бесконечные комитеты — некоторые последовательности; например, сходящиеся к множеству, аппроксимирующему $\widetilde{M}$.

Комитетные конструкции можно применять и в анализе параметрических задач оптимизации, как некоторые стохастические, «размытые» решения. Так как при изменении параметров, от которых зависит информационная составляющая задачи, допустимая область может стать пустой, то вместо решения, сконцентрированного в одной точке, естественно рассматривать решения, распределенные в виде «облака» точек. Если на комитете задано распределение вероятностей (т. е. член комитета выступает как случайный вектор), то можно считать комитет некоторой смешанной стратегией. Естественные конкретные примеры такой интерпретации можно найти в экономике и биологии.

Так, например, для практических приложений важна следующая задача, приводящая к отысканию p-комитета. Пусть задана система ограничений $f_j(x) \leqslant 0 \quad \forall j \in I$ на ситуацию или состояние $x \in \mathbf{R}^n$. Предполагается, что при функционировании объекта требование о выполнении j-го ограничения $f_j(x) \leqslant 0$ будет предъявлено с вероятностью p_j. Требуется выбрать вероятностный комитет $K = \{x_i$ с вероятностью q_i: $i = 1, \ldots, r\}$ такой, чтобы максимизировалось математическое ожидание вероятности того, что любое затребованное ограничение было выполнено.

20.7. Применение комитетов к задаче частичного удовлетворения потребностей при недостаточных ресурсах. Пусть $x \in X$ — план функционирования экономики. На x накладываются следующие требования:

— по удовлетворению потребностей:

$$(c_j, x) \geqslant b_j \quad \forall j \in I; \tag{20.6}$$

— по расходу ограниченных объемов ресурсов:

$$(d_j, x) \leqslant v_j \quad \forall j \in J. \tag{20.7}$$

Предположим, что система (20.6), (20.7) несовместна. Тогда строим p-комитет системы (20.6), лежащий в множестве всех решений системы (20.7). Число p максимизируется.

При такой постановке мы выбираем один из рациональных путей частичного удовлетворения всех потребностей. План (комитетный) $K = \{x_1, \ldots, x_q\}$ можно использовать, либо принимая решения $x_1, \ldots, x_q$ в циклически повторяющейся последовательности, либо как случайный вектор $x_i \in K$ с вероятностью $1/q$.

Итак, пусть M — множество векторов, допустимых по расходу ресурсов, технико-экономическим и другим показателям, т. е. удовлетворяющих (20.7). Требования потребления выражены соотношениями (20.6). Требуется найти $\max\{p\colon K$ есть p-комитет системы (20.6), $K \subset M\}$. Это можно сделать следующим образом. Находим максимальные совместные подсистемы системы

$$(c_j, x) \geqslant b_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \quad x \in M, \tag{20.8}$$

включающие ограничение $x \in M$. Пусть индексы подсистем из (20.6), включаемых в эти максимальные совместные подсистемы, суть $I_1, \ldots, I_q$, x_s — решение подсистемы $(c_j, x) \geqslant b_j$ $\forall j \in I_s$, $x \in M$. Затем решаем задачу отыскания максимального p такого, что K есть p-комитет системы (20.6), K состоит только из точек $x_1, \ldots, x_q$ (каждая, возможно, в нескольких экземплярах). Эта задача имеет вид задачи целочисленного программирования.

Рассмотрим вопрос о нахождении максимальных совместных подсистем системы (20.8), включающих ограничение $x \in M$. Это можно сделать с помощью метода свертывания. Найдя полную свертку системы (20.8), получаем индексы минимальных несовместных подсистем: $J_1, \ldots, J_s$. Затем отыскиваем максимальные S: $S \not\supset J_k$, $k = 1, \ldots, s$, $S \supset T$, где T — индекс системы неравенств $x \in M$.

Приведем еще один пример комитетного решения задачи, являющейся абсолютизацией некоторой реальной ситуации. Пусть имеется система уравнений

$$f_j(x) = b_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m. \tag{20.9}$$

Реальные ограничения должны быть неравенствами, но мы не знаем — какими именно (некоторые $\geqslant$, некоторые $\leqslant$). Тогда комитет K системы (20.9) является хорошим приближением для реальной системы, так как любое ограничение реальной системы на нем выполняется с вероятностью $> 1/2$. Можно привести подобные примеры и для других случаев абсолютизации реальной системы.

20.8. Комитеты как стохастические решения. Рассмотрим задачу математического программирования: найти

$$\arg\sup\{f(x)\colon f_j(x) \leqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m^*\}, \tag{20.10}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$. Если множество M решений системы

$$f_j(x) \leqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m \tag{20.11}$$

непусто, то элемент (20.10), существующий в собственном смысле, можно считать решением, сосредоточенным в точке. Если же $M = \varnothing$, то можно рассматривать «облако» решений некоторых совместных подсистем системы (20.11), например, максимальных совместных подсистем. Эта совокупность решений подсистем должна удовлетворять некоторым дополнительным требованиям, например, быть p-комитетом системы (20.11), и в этом случае она может трактоваться как стохастическое решение или как смешанная стратегия использования выделенных решений подсистем с некоторыми вероятностями.

Эту идею можно реализовать в следующей конструкции. Пусть $\mathscr{K}_p$ — множество всех p-комитетов системы (20.11). Задаче (20.10) придадим следующий смысл: требуется найти

$$\arg\sup\left\{\frac{1}{|K|}\sum_{x\in K} f(x):\ K\in\mathscr{K}_p\right\}.$$

Решением этой задачи является p-комитет K, который можно трактовать как смешанную стратегию применения его членов с одинаковыми вероятностями, причем вероятность выполнения каждого неравенства системы (20.11) больше, чем p, и при этих условиях максимизируется математическое ожидание значения критериальной функции $f(x)$.

Рассмотрим комитеты с дополнительным условием, учитывающим приближенное выполнение всех ограничений на допустимость вектора x. Пусть $M_j(\varepsilon) = \{x:\ (c_j, x) \leqslant b_j + \varepsilon\}$, $M_j = M_j(0)$, $j = 1, \ldots, m$, $M(\varepsilon) = \bigcap\limits_{j=1}^{m} M_j(\varepsilon)$, $M = M(0)$. Рассмотрим множество всех слабых p-комитетов системы $\{M_j:\ j = 1, \ldots, m\}$:

$$\mathscr{K}(p) = \{K:\ |K \cap M_j| \geqslant p|K|\quad \forall j\in \mathbf{N}_m\}$$

и множество всех ε-ограниченных слабых p-комитетов:

$$\mathscr{K}(\varepsilon, p) = \{K\subset M(\varepsilon):\ K\in\mathscr{K}(p)\}.$$

Пусть $\bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon:\ K(\varepsilon, p) \neq \varnothing\}$, $E = \min\{\varepsilon:\ M(\varepsilon) \neq \varnothing\}$.

Теорема 20.1. *Если $E > 0$ (т. е. если $M = \varnothing$), то существует $j \in \mathbf{N}_m$ такое, что $M_j \cap M(E) = \varnothing$.*

Доказательство. Обозначим $H_j(\varepsilon) = \{x:\ (c_j, x) = b_j + \varepsilon\}$. Известно [25], что существует j' такое, что

$M(E) \subset H_{j'}(E)$. Тогда $M(E) \cap M_{j'} = \varnothing$, что и требовалось.

Следствие 20.1. *При $p > 0$ не существует слабого p-комитета $K \subset M(E)$, т. е. $\bar{\varepsilon} > E$.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно, и K есть слабый p-комитет системы $\{M_j: j = 1, \ldots, m\}$, $K \subset M(E)$. Пусть j' — номер, для которого $M(E) \subset H_{j'}(E)$. Тогда $\forall x \in K$: $x \in M(E) \Rightarrow x \notin M_{j'}$. В то же время, по определению слабого p-комитета, $|K \cap M_{j'}| \geqslant p|K|$; получим противоречие.

Рассмотрим задачи

$$\mu(\varepsilon, p) = \sup\left\{\frac{1}{|K|}\sum_{x \in K} f(x) \colon K \in \mathscr{K}(\varepsilon, p)\right\}, \qquad (20.12)$$

$$\nu = \inf_{u \in M^*}\left\{f^*(u) + (1-p)\varepsilon\sum_{j=1}^{m} u_j\right\},$$

где при $f(x) = (c, x)$

$$M^* = \left\{u \geqslant 0 \colon \sum_{j=1}^{m} u_j c_j = c\right\}, \quad f^*(u) = \sum_{j=1}^{m} u_j b_j.$$

Так как $\bar{\varepsilon} > E$, то при $(1-p)\varepsilon \geqslant \bar{\varepsilon}$ $M((1-p)\varepsilon)$ непусто. Положим $\bar{x} = \frac{1}{|K'|}\sum\limits_{x \in K'} x$, где K' — множество оптимальных решений задачи (20.12).

Теорема 20.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Если $f(x)$ — линейна, то $f(\bar{x}) = \mu(\varepsilon, p)$.*
2) *Если $f(x)$ выпукла, то $f(\bar{x}) \leqslant \mu(\varepsilon, p)$.*
3) $\bar{x} \in M((1-p)\varepsilon)$.
4) *Если $f(x)$ линейна, то $\mu(\varepsilon, p) = f(\bar{x}) \leqslant \nu$.*

Доказательство.

1) $$f(\bar{x}) = f\left(\frac{1}{|K'|}\sum_{x \in K'} x\right) = \frac{1}{|K'|}\sum_{x \in K'} f(x) = \mu(\varepsilon, p).$$

2) $$f(\bar{x}) = f\left(\frac{1}{|K'|}\sum_{x \in K'} x\right) \leqslant \frac{1}{|K'|}\sum_{x \in K'} f(x) = \mu(\varepsilon, p).$$

3) $$(c_j, \bar{x}) = \frac{1}{|K'|}\sum_{x \in K'} (c_j, x) \leqslant \frac{1}{|K'|}(p|K'|b_j + {}$$
$$+ (|K'| - p|K'|)(b_j + \varepsilon)).$$

4) $$\mu(\varepsilon, p) = \frac{1}{|K'|}\sum_{x\in K'} f(x) = \frac{1}{|K'|}\sum_{x\in K'} (c, x) =$$

$$= \frac{1}{|K'|}\sum_{x\in K'}\left(x, \sum_{j=1}^{m} u_j c_j\right) = \frac{1}{|K'|}\sum_{j=1}^{m} u_j \sum_{x\in K'} (c_j, x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|K'|}\sum_{j=1}^{m} (p\,|K'|\,u_j b_j + (|K'| - p\,|K'|)u_j(b_j + \varepsilon)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} u_j b_j + (1-p)\,\varepsilon \sum_{j=1}^{m} u_j = f^*(u) + (1-p)\,\varepsilon \sum_{j=1}^{m} u_j.$$

Поэтому $\mu(\varepsilon, p) \leqslant \min\limits_{u\in M^*}\left[f^*(u) + (1-p)\,\varepsilon\sum\limits_{j=1}^{m} u_j\right] = \nu$. Соотношение $\nu = \sup\{f(x)\colon\ (c_j,\ x) \leqslant b_j + (1-p)\varepsilon\quad \forall j\in \mathbb{N}_m\}$ выполняется в силу теоремы двойственности. Следовательно, $\nu \geqslant f(x^*)$, так как $\bar{x} \in M((1-p)\varepsilon)$.

Пример. Задача $\max\{f(x) = 3x_1 + 2x_2\colon\ -x_1 \leqslant 2,\ -x_2 \leqslant 2,\ x_1 + x_2 \leqslant 3\}$ — несобственная (допустимое множество пусто). Положим $\varepsilon = 1{,}5$, и, следовательно, слабые p-комитеты (пусть $p = 2/3$) будем брать в области $-x_1 \leqslant \leqslant -0{,}5,\ -x_2 \leqslant -0{,}5,\ x_1 + x_2 \leqslant 4{,}5$. Значение $\mu(\varepsilon,\ p)$ достигается на слабом 2/3-комитете $K = \{x^1,\ x^2,\ x^3\}$, где $x^1 = [1;\ 2],\ x^2 = [2{,}5;\ 2],\ x^3 = [2{,}5;\ 0{,}5]$. Следовательно, $\mu(\varepsilon,\ p) = [f(x^1) + f(x^2) + f(x^3)]/3 = 9$.

Двойственная задача: $\min\{f^*(u) = -2u_1 - 2u_2 + 3u_3\colon -u_1 + u_3 = 3,\ -u_2 + u_3 = 2,\ u \geqslant 0\}$. Подставим $u_3 = 3 + u_1$; получим $\min\{u_1 - 2u_2 + 9\colon\ 3 + u_1 \geqslant 0,\ u \geqslant 0,\ u_1 - u_2 = -1\} = -\infty$ при $u_1 \to \infty,\ u_2 = u_1 + 1,\ u_3 = u_1 + 3$. В то же время

$$\min_{u\in M^*}\left[f^*(u) + (1-p)\,\varepsilon\sum_{j=1}^{m} u_j\right] = \min\{(-1{,}5)\,u_1 + (-1{,}5)\,u_2 + (3{,}5)\,u_3\colon\ u \in M^*\} = 9 = \mu(\varepsilon, p)$$

(при $u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 3$).

Запишем задачу, для которой задача $\min\limits_{u\in M^*}\left[f^*(u) + (1-p)\,\varepsilon\sum\limits_{j=1}^{m} u_j\right]$ является двойственной:

$$\max\{f(x)\colon\ -x_1 \leqslant -1{,}5,\ -x_2 \leqslant -1{,}5,\ x_1 + x_2 \leqslant 3{,}5\};$$

ее оптимальное решение $\bar{x} = [2;\ 1{,}5]$. Здесь $\bar{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x^i$; $f(\bar{x}) = 9$.

20.9. Комитетные решения в транспортной задаче. Рассмотрим систему ограничений транспортной задачи:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in \mathrm{N}_m, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in \mathrm{N}_n, \\ &x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathrm{N}_m, \quad \forall j \in \mathrm{N}_n. \end{aligned} \tag{20.13}$$

Известно необходимое и достаточное условие совместности этой системы при $a_i \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Предположим, что система (20.13) несовместна. Тогда система уравнений в (20.13) является неприводимо несовместной, т. е. всякая ее собственная подсистема совместна. Поэтому одна из систем представителей решений всех ее максимальных совместных подсистем имеет вид $\{x(1), \ldots, x(mn)\}$, где $x(j)$ — решение подсистемы этой системы уравнений, в которой отсутствует только j-е уравнение. Легко проверить, что для всяких трех различных i, j, k множество $K(i, j, k) = \{x(i), x(j), x(k)\}$ является комитетом указанной системы уравнений. Эту ситуацию можно обобщить на случай произвольной системы уравнений над $\mathbf{R}^n$, когда ранг системы $r < n$.

Рассмотрим пример с двумя складами и одним потребителем:

Склады; запасы \ Потребитель; потребности	4
2	x_1
3	x_2

Комитет: $\{x^1 = [2,\ 3],\ x^2 = [1,\ 3],\ x^3 = [2,\ 2]\}$. Экономический смысл применения этого комитета таков. Проводя транспортировку грузов от складов потребителю в течение многих моментов времени, мы чередуем планы x^1, x^2, x^3. Пусть штраф за принятие потребителем единицы лишнего груза равен u, штраф за невывоз единицы груза от первого склада равен v, от второго w. Результаты комитетной стратегии отражаются следующей таблицей (где t — время):

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	x^1	x^2	x^3	x^1	x^2	x^3	x^1	x^2	x^3	x^1	x^2	x^3	x^1
u	u	0	0	u	0	0	u	0	0	u	0	0	u
v	0	v	0	0	v	0	0	v	0	0	v	0	0
w	0	0	w	0	0	w	0	0	w	0	0	w	0
Σ	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u	v	w	u

При данной стратегии участники данной экономической системы чередуются в уплате штрафов.

20.10. Экономическая интерпретация комитета векторов двойственных оценок. Пусть A — технологическая матрица задачи линейного программирования:

$$A = \begin{bmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_m \end{bmatrix} = [p_1 \ldots p_n],$$

где p_i — векторы технологических способов, c_j — вектор коэффициентов расхода j-го ресурса в технологических способах. Пусть, далее, γ_i — выход продукта при единичной интенсивности использования i-го способа, b — вектор запасов ресурсов. Задача Z нахождения оптимальных интенсивностей использования технологических способов имеет вид

$$Z\colon\ \max\left\{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i = (c, x)\colon\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant b,\ x \geqslant 0\right\}.$$

Рассмотрим следующие два варианта несобственности задачи Z:

1) $\mu = \operatorname{opt} Z = +\infty$;

2) $M = \{x\colon (c_j, x) \leqslant b_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m,\ x \geqslant 0\} = \varnothing$.

Двойственная задача Z^* имеет вид

$$Z^*\colon\ \min\left\{(b, y) = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j\colon\ (p_i, y) \geqslant \gamma_i \quad \forall i \in \mathbf{N}_m,\ y \geqslant 0\right\}.$$

В случае 1) допустимое множество задачи Z^* пусто. Пусть одна из максимальных совместных подсистем системы ее ограничений имеет вид

$$(p_i, y) \geqslant \gamma_i \quad \forall i \in I, \qquad y_j \geqslant 0 \quad \forall j \in J. \qquad (20.14)$$

Возможны два подслучая:

а) $\min\{(b, y)$: система (20.14) совместна$\} = \mu^*(I, J) > -\infty$;

б) $\mu^*(I, J) = -\infty$.

Пусть имеет место случай а). Тогда

$$+\infty > \mu(I, J) = \max\Big\{\sum_{i\in I} \gamma_i x_i\colon \sum_{i\in I} p_i x_i \leqslant b_j \quad \forall j \in J,$$
$$\sum_{i\in I} p_i x_i = b_j \quad \forall j \notin J,$$
$$x_i \geqslant 0 \quad \forall i \in I\Big\} = \mu^*(I, J) > -\infty.$$

Следовательно, максимальная совместная подсистема (20.13) выделяет собственную часть задачи Z.

В случае б) допустимое множество задачи $Z(I, J)$, отвечающей определению $\mu(I, J)$, пусто.

20.11. Комитеты и штрафы в экономическом планировании. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ — вектор состояния экономической системы, и условия по выпуску продуктов и затратам ресурсов имеют вид

$$f_j(x) = (c_j, x) - b_j \leqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m. \qquad (20.15)$$

При этом затраты на состояние x равны $f(x)$; кроме того, пусть имеется условие $x \in C$. Если функция штрафов за невыполнение условий имеет вид

$$d(x) = \sum_{j=1}^{m} |f_j^+(x)|^2,$$

то задача выбора оптимального вектора состояния сводится к следующей:

$$A\colon \inf\{f(x) + rd(x)\colon x \in C\}.$$

В работе [31] приводятся условия, при которых

$$\operatorname{Arg} A = \operatorname{Arg}\inf\{f(x)\colon d(x) \leqslant E\},$$

где $E = \inf\{d(x)\colon x \in C\}$.

Если же $d(x) = r\sum_{j=1}^{m} \operatorname{sign} f_j(x)$, то локальные минимумы функции $f(x) - rd(x)$ являются решениями задачи минимизации $f(x)$ на максимальных совместных подсистемах системы (20.15) при достаточно большом $r > 0$.

Итак, система оценки результатов деятельности при несовместной системе ограничений, включающая начисление прибыли от производства продуктов и штрафы за недопроизводство, может обеспечивать как непрерывное приближение, так и дискретное, в зависимости от вида функции штрафов.

20.12. Комитеты в стохастической оптимизации. Рассмотрим далее следующие стохастические задачи:

I. $p_\theta(x(\theta) \in M_j) > p \quad \forall j \in \mathbf{N}_m$.

II. $p_\theta((a_j, x(\theta)) - b_j < 0) > p \quad \forall j \in \mathbf{N}_m$.

III. $p_\theta(x \in M_j(\theta)) > p \quad \forall j \in \mathbf{N}_m$.

IV. $p_\theta((a_j(\theta), x) - b_j(\theta) < 0) > p \quad \forall j \in \mathbf{N}_m$.

В задаче I заданы множества $M_1, \ldots, M_m$; требуется найти распределение $x = x(\theta)$ такое, чтобы вероятность выполнения каждого соотношения $x \in M_j$ была больше, чем некоторое фиксированное число p $(0 \leqslant p < 1)$.

В задаче II заданы $a_j \in \mathbf{R}^n$, $b_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$, требуется найти $x = x(\theta)$ такое, чтобы вероятность выполнения каждого неравенства $(a_j, x) - b_j < 0$ была больше p.

В задаче III заданы множества $M_j = M_j(\theta)$, зависящие от вероятностного параметра θ; требуется найти x, при котором вероятность включения $x \in M_j(\theta)$ будет больше p.

В IV записана аналогичная задача, когда заданы неравенства, коэффициенты которых зависят от вероятностного параметра.

Из теорем существования комитета вытекают следующие условия существования решений задач I и II.

Теорема 20.3. *Если в задаче* I *любые s множеств M_j имеют непустое пересечение и $s/m > p$, то существует решение в виде дискретного распределения $\{x_1, \ldots, x_q\}$, где каждое x_i появляется с вероятностью $1/q$.*

Теорема 20.4. *Решение задачи* II, *имеющее вид дискретного распределения $\{x_1, \ldots, x_q\}$, где каждое x_i появляется с вероятностью $1/q$, существует тогда и только тогда, когда каждые два неравенства системы $f_j(x) = (a_j, x) - b_j < 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m$ совместны. При этом $q_{\min} \leqslant m$.*

Проинтерпретируем задачу III в терминах комитетных конструкций. Для каждого j задано семейство множеств $M_j(\theta)$. Нужно подобрать такое x, чтобы для любого j семейство $M_j(\theta)$ было p-комитетом для системы, состоящей из включения $x \in M_j$. С такой же точки зрения рассмотрим задачу IV. Положим

$$[a_j,\ b_j] = z_j, \quad [a_j(\theta),\ b_j(\theta)] = z_j(\theta), \quad \varphi_j(z) = (a_j, x) - b_j.$$

Для каждого j задано множество точек $z_j(\theta)$. Требуется найти функцию φ (определяемую вектором x), такую, что для любого j множество $z_j(\theta)$ есть p-комитет системы из одного неравенства $\varphi(z) < 0$.

Эту задачу, рассматриваемую для случая дискретного распределения $z_j(\theta)$, можно следующим образом обобщить. Даны конечные множества функций: $F_1, \ldots, F_m$. Требуется найти конечное множество векторов $K = \{x_1, \ldots, x_q\}$ такое, чтобы для любого $j \in \mathbf{N}_m$ выполнялась более чем p-я часть неравенств системы

$$f(x) > 0, \quad x \in K, \quad f \in F_j.$$

Для случая системы включений аналогичная постановка задачи такова. Пусть $\mathfrak{M}_j$ есть j-я конечная совокупность множеств ($j = 1, \ldots, m$). Требуется найти конечное множество K такое, чтобы

$$\sum_{M \in \mathfrak{M}_j} |K \cap M| > p_j |\mathfrak{M}_j| |K| \quad \forall j \in \mathbf{N}_m.$$

Рассмотрим условия существования дискретного комитета для дискретной стохастической системы линейных неравенств. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — множества линейных функций n-мерного вектора. Будем отыскивать совокупность K такую, чтобы для любого $j \in \mathbf{N}_m$ выполнялось более половины из неравенств

$$f(x) > 0, \quad f \in F_j, \quad x \in K. \tag{20.16}$$

Рассмотрим случай $\mathbf{R}^2$.

Теорема 20.5. *Если среди неравенств $f(x) > 0$ $\forall f \in \bigcup_{j=1}^{m} F_j$ каждые два неравенства совместны, то комитет в смысле определения* (20.16) *существует. Он состоит из решений максимальных совместных подсистем, взятых по одному для каждой такой подсистемы.*

Доказательство. Если взять для каждой максимальной совместной подсистемы системы

$$f(x) > 0 \quad \forall f \in \bigcup_{j=1}^{m} F_j \tag{20.17}$$

по одному решению, то получим комитет системы (20.17): $K=\{x_1, \ldots, x_{2k+1}\}$. Каждому неравенству из (20.17) удовлетворяет не менее $k+1$ точек из K. Пусть $|F_j| = m_j$. Число всех удовлетворений неравенств (20.16) не менее $m_j(k+1)$, в то время как число всех неравенств в (20.16) равно $m_j(2k+1)$. Поэтому число удовлетворяющихся неравенств, деленное на число всех неравенств, равно $(k+1)/(2k+1) > 1/2$.

Замечание 20.1. Условие отсутствия в $\bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j$ противоречий не является необходимым для существования дискретного комитета дискретной стохастической системы, что показывает следующий пример в $\mathbf{R}^2$:

$$F_1 = \{f_1(x) = x_1, \quad f_2(x) = x_2\},$$
$$F_2 = \{f(x) = -x_2\}, \quad x = [x_1, x_2].$$

Комитет:

$$K = \{x^1 = [1, 1], x^2 = [1, -1], x^3 = [2, -1]\}.$$

Замечание 20.2. Условие, чтобы в каждой F_j, рассматриваемой отдельно, не было противоречий, также не является необходимым, что показывает следующий пример:

$$F_1 = \{f_1(x) = x_1, \ f_2(x) = -x_1, \ f_3(x) = x_2, \ f_4(x) = x_1 + x_2\},$$
$$K = \{[-1, 2], [1, 2], [2, 1]\}.$$

§ 21. Методы построения дискретных аппроксимаций

21.1. Методы построения комитетов систем неравенств и систем множеств описаны в [51—54]. Здесь мы рассмотрим следующие задачи.

Пусть дано множество $\mathscr{K}$ и система множеств $\mathscr{D} = \{D_j\colon j \in J\}$.

1. Найти множество $K \subset \mathscr{K}$ такое, что K есть p-комитет для $\mathscr{D}$.
2. Найти $\arg\max \{p\colon \exists K \subset \mathscr{K}, \ K$ есть p-комитет для $\mathscr{D}\}$.
3. Найти $\arg\max \{|K|\colon K \subset \mathscr{K}, \ K$ есть p-комитет для $\mathscr{D}\}$.
4. Найти $\arg\min \{|K|\colon K \subset \mathscr{K}, \ K$ есть p-комитет для $\mathscr{D}\}$.

Для решения этих задач каждому $x \in \mathcal{K}$ поставим в соответствие вектор $\sigma(x) = [\sigma_j\colon j \in J]$, где

$$\sigma_j = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in D_j, \\ -1, \text{ если } x \notin D_j. \end{cases}$$

Будем далее предполагать множества J и K конечными: $J = \mathbf{N}_m$, $\mathcal{K} = \{x_1, \ldots, x_q\}$. Положим $\sigma_i = \sigma(x_i) = [\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{im}]$. Множеству $K \subset \mathcal{K}$ поставим в соответствие вектор $z = [z_1, \ldots, z_q]$, где

$$z_j = \begin{cases} 1, & x_i \in K, \\ 0, & x_i \notin K. \end{cases}$$

Задачу 1 можно сформулировать так: найти

$$Z(p) = \left\{ z \in \mathbf{R}^q\colon\ z_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{q} z_i(\sigma_i + v) > 2p \sum_{i=1}^{q} z_i \right\},$$

где $v = [1, \ldots, 1]$. Тогда задачи 2—4 переформулируются следующим образом:

Задача 2: найти $\max\{p\colon Z(p) \neq \varnothing\}$.

Задача 3: найти $\max\left\{\sum_{i=1}^{q} z_i\colon\ z \in Z(p)\right\}$.

Задача 4: найти $\min\left\{\sum_{i=1}^{q} z_i\colon\ z \in Z(p)\right\}$.

Таким образом, рассмотренные задачи сводятся к задачам целочисленного линейного программирования.

21.2. Комитетные конструкции для систем нелинейных неравенств и для бесконечных систем линейных неравенств. Комитетные конструкции, в число которых входят — в качестве основных — минимальные несовместные подсистемы (ν-подсистемы) и максимальные совместные подсистемы (μ-подсистемы), хорошо изучены для конечных систем линейных неравенств: доказаны теоремы существования, предложены и обоснованы методы построения, реализованные в ППП «КВАЗАР», даны направления приложений в математическом программировании и распознавании образов, решены конкретные практические задачи. Некоторые результаты получены и для нелинейных систем.

Однако такая весьма важная для приложений в планировании и распознавании задача, как задача нахождения всех максимальных совместных подсистем и нахождения всех минимальных несовместных подсистем системы нелинейных неравенств, исследована недостаточно, для нее не подготовлено программное обеспечение.

Актуальность этого направления для математического программирования понятна, так как несобственные задачи возникают не только в линейном программировании. В частности, совершенно естественно и полезно изучать дискретные аппроксимации для несобственных задач выпуклого программирования.

Конечные системы выпуклых неравенств сводятся разными способами к бесконечным системам линейных неравенств (ЛН), в связи с чем необходимо иметь методы нахождения или описания совокупности всех μ- и ν-подсистем для таких бесконечных систем. Точнее, необходимо исследовать следующую цепочку: система выпуклых неравенств аппроксимируется бесконечной системой ЛН, эта система — счетной системой ЛН, а последняя, наконец,— конечной системой ЛН. Необходимо исследовать соотношение между μ- и ν-подсистемами, комитетами и минимальными комитетами этих систем.

Задача распознавания образов непосредственно связана с бесконечными системами линейных неравенств: в непрерывном случае обучающие выборки потенциальпо бесконечны, а сами образы представляют собой бесконечные множества.

Для нахождения ν-подсистем можно использовать метод свертывания. Этот метод предложен и использован С. Н. Черниковым для случая произвольных (не обязательно совместных) конечных систем линейных неравенств и для случая совместных полиэдральных замкнутых бесконечных систем линейных неравенств.

Ограничения, входящие в модель планирования (проектирования, управления) имеют приоритеты, различную степень эластичности: в частности, в системе ограничений можно выделить директивные и факультативные. В связи с этим необходимо находить для некоторой области значений параметра t ν-подсистемы системы

$$(c_\alpha, x) - \beta_\alpha \leqslant \gamma_\alpha t \quad \forall \alpha \in A,$$

где γ_α — коэффициент эластичности.

Кроме метода свертывания, который, как правило, связан с использованием большого объема памяти, необходимо иметь и более простые алгоритмически и программно реализованные методы.

Исследование множеств μ-подсистем для различных классов задач и изучение возможности построения достаточно эффективных комитетных конструкций из решений таких подсистем может пролить некоторый свет на природу соответствующих реальных задач.

Принципиальная схема метода анализа μ-подсистем системы выпуклых неравенств может иметь следующий вид.

1. Системе выпуклых неравенств

$$f_j(x) \leqslant 0, \quad j \in \mathbf{N}_m, \tag{21.1}$$

ставится в соответствие бесконечная система линейных неравенств

$$(c_{\alpha_j}, x) - b_{\alpha_j} \leqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \quad \forall \alpha_j \in A_j. \tag{21.2}$$

Это может быть сделано многими способами.

2. Система (21.2) аппроксимируется некоторой конечной системой линейных неравенств

$$(c_j, x) - b_j \leqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_k. \tag{21.3}$$

3. Находятся все ν- и μ-подсистемы системы (21.3), по ним — все ν- и μ-подсистемы (21.2) и по последним — все ν- и μ-подсистемы системы (21.1).

Рассмотрим подробнее первый этап этой схемы.

21.3. Линеаризация системы (21.1). Пусть функции f_j — выпуклые дифференцируемые. Системе (21.1) поставим в соответствие систему

$$(\nabla f_j(p), x - p) + f_j(p) \leqslant 0 \quad \forall p \in \mathbf{R}^n, \quad \forall j \in \mathbf{N}_m. \tag{21.4}$$

Каждому неравенству системы (21.4) соотнесем его индекс $[p, j]$. Обозначим через A и B множества, задаваемые системами (21.1) и (21.4) соответственно.

Теорема 21.1. *Если f_j выпуклы и дифференцируемы, то справедливы следующие утверждения:*

1) $A = B$.

2) *Если* $\{[p, j]\colon p \in \mathbf{R}^n, j \in J\} = \mathbf{R}^n \times J$ — *индекс некоторой μ-подсистемы системы* (21.4), *то* J — *индекс некоторой μ-подсистемы системы* (21.1).

3) *Если* J — *индекс некоторой μ-подсистемы системы* (21.1), *то* $\mathbf{R}^n \times J$ — *индекс некоторой совместной* (*но не обязательно максимально совместной*) *подсистемы* (21.4), *причем* $\forall s \notin J$ $\mathbf{R}^n \times (J \cup \{s\})$ — *индекс несовместной подсистемы.*

4) *Если* $\mathbf{R}^n \times J$ — *индекс некоторой ν-подсистемы системы* (21.4), *то* J — *индекс ν-подсистемы системы* (21.1).

5) *Если J — индекс некоторой ν-подсистемы для* (21.1), *то $J\times\mathbf{R}^n$ может не быть индексом ν-подсистемы для* (21.4), *но $J\times\mathbf{R}^n$ — индекс несовместной подсистемы.*

6) *Если K — комитет системы* (21.4), *то K может не быть комитетом системы* (21.1); *если же K — комитет системы* (21.1), *то K — комитет системы* (21.4).

Доказательство. 1) Пусть $\bar{x}\in A$. Так как f_j выпуклы, то

$$(\nabla f_j(p), \bar{x}-p)\leqslant f_j(\bar{x})-f_j(p)\leqslant -f_j(p)\quad \forall p\in\mathbf{R}^n,$$

т. е. $\bar{x}$ удовлетворяет системе (21.4). Пусть теперь $\bar{x}\in B$. Зафиксируем любое $j\in\mathbf{N}_m$. Надо доказать, что $f_j(\bar{x})\leqslant 0$. Предположим противное: $f_j(\bar{x})>0$. Тогда для $p=\bar{x}$ имеем $(\nabla f_j(p), \bar{x}-p)+f_j(p)>0$; получили противоречие.

2) Пусть $\{[p, j]\colon p\in\mathbf{R}^n,\ j\in J\}=\mathbf{R}^n\times J$ — индекс некоторой μ-подсистемы системы (21.4). Тогда

$$\exists\bar{x}\in\mathbf{R}^n\colon\ (\nabla f_j(p), \bar{x}-p)+f_j(p)\leqslant 0\quad \forall j\in J,\quad \forall p\in\mathbf{R}^n.$$

Отсюда, как и выше, получаем: $f_j(\bar{x})\leqslant 0\quad \forall j\in J$. Кроме того, $\forall p\in\mathbf{R}^n$, $\forall s\notin J$ система

$$f_j(x)\leqslant 0\quad \forall j\in J,\quad (\nabla f_s(\bar{p}), x-\bar{p})+f_s(\bar{p})\leqslant 0$$

несовместна. Положим $M(J)=\{x\colon\ f_j(x)\leqslant 0\quad \forall j\in J\}$. Имеем: $(\nabla f_s(\bar{p}), \bar{x}-\bar{p})+f_s(\bar{p})>0\quad \forall\bar{x}\in M(J)$. Покажем, что система

$$f_j(x)\leqslant 0\quad \forall j\in J,\quad f_s(x)\leqslant 0$$

несовместна. Действительно, пусть, напротив, $\exists\bar{x}\in M(J)\colon f_s(\bar{x})\leqslant 0$. Так как $\bar{x}\in M(J)$, то $(\nabla f_s(\bar{p}), \bar{x}-\bar{p})+f_s(\bar{p})>0$. Но $f_s(\bar{x})\leqslant 0$ влечет $(\nabla f_s(\bar{p}), \bar{x}-\bar{p})+f_s(\bar{p})\leqslant f_s(\bar{x})\leqslant 0$; получили противоречие.

3) Пусть J — индекс некоторой μ-подсистемы системы (21.1). Тогда $\mathbf{R}^n\times J$ — индекс совместной подсистемы системы (21.4), так как очевидно, что система

$$(\nabla f_j(p), x-p)+f_j(p)\leqslant 0\quad \forall p\in\mathbf{R}^n,\quad \forall j\in J$$

совместна. Однако, вообще говоря, $\mathbf{R}^n\times J$ — не обязательно есть индекс μ-подсистемы системы (21.4). Например, если система (21.1) имеет вид $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$ (индекс $j=1$), $(x_1-10)^2+x_2^2\leqslant 1$ (индекс $j=2$), то $J=\{1\}$ — индекс ее μ-подсистемы, но система

$$2p_1(x_1-p_1)+2p_2(x_2-p_2)+p_1^2+p_2^2-1\leqslant 0 \quad \forall p\in \mathbf{R}^n,$$
$$(\nabla f_2(p), x-p)+f_2(p)\leqslant 0$$

совместна при $p=[20, 0]$.

4) Пусть $\mathbf{R}^n\times J$ — индекс ν-подсистемы системы (21.4). Тогда очевидно, что J — индекс некоторой несовместной подсистемы системы (21.1).

5) Пусть J — индекс ν-подсистемы системы (21.1). Приведем пример, показывающий, что $J\times\mathbf{R}^n$ может не быть индексом ν-подсистемы для системы (21.4):

$$f_1(x)=x_1^2+x_2^2-1, \quad f_2(x)=(x_1-10)^2+x_2^2-1.$$

Индекс ν-подсистемы для системы (21.1) в данном примере таков: $J=\{1, 2\}$. Система

$$(\nabla f_1(p), x-p)+f_1(p)\leqslant 0 \quad \forall p\in\mathbf{R}^n,$$
$$(\nabla f_2(p), x-p)+f_2(p)\leqslant 0 \quad \forall p\in\mathbf{R}^n$$

является несовместной, но не минимальной несовместной, так как ее подсистема

$$(\nabla f_1(p), x-p)+f_1(p)\leqslant 0 \quad \forall p\in\mathbf{R}^n,$$
$$(\nabla f_2(\bar p), x-\bar p)+f_2(\bar p)\leqslant 0, \quad \bar p=[5, 0]$$

также несовместна.

Наконец, тот факт, что если J — индекс некоторой ν-подсистемы системы (21.1), то $J\times\mathbf{R}^n$ — индекс несовместной подсистемы системы (21.4), следует из уже доказанного утверждения 1).

6) Приведем пример, показывающий, что комитет системы (21.4) может не быть комитетом системы (21.1). Пусть система (21.1) состоит из двух неравенств: $x_1\geqslant 0$, $x_1^{-1}-x_2\leqslant 0$. Здесь $f_1(x)=x_1$, $f_2(x)=x_1^{-1}-x_2$, $\nabla f_2(p)=$ $=[-p_1^{-2}, -1]$. Система (21.4) такова:

$$-x_1\leqslant 0, \; -\frac{x_1}{p_1^2}-x_2+\frac{2}{p_1}\leqslant 0 \quad \forall p\in\mathbf{R}^n.$$

Комитет системы (21.4) имеет вид

$$K=\left\{\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right], \ldots, \left[\frac{k}{k+1}, \frac{k}{k+1}\right], \ldots\right\}.$$

Однако K не есть комитет системы (21.1), так как ни один его член не удовлетворяет второму неравенству. Утверждение, что комитет системы (21.1) есть комитет системы (21.4), очевидно.

ГЛАВА V

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данной главе основное внимание уделено теоретическим вопросам, возникающим при рассмотрении несобственных задач выпуклого программирования. Это, в первую очередь, вопросы классификации, рассматриваемые с более общих позиций, чем во введении, принципы двойственности для несобственных задач, анализ двойственности под углом зрения свойств конечномерных аппроксимаций исходных задач и др.

§ 22. Классификация несобственных задач ВП и соответствующих им аппроксимационных семейств

Задачу ВП запишем в форме

$$C\colon\ \sup\{f_0(x)\colon\ f_j(x)\leqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\geqslant 0\}.\qquad(22.1)$$

Введем обозначения: $\tilde{f}$ — оптимальное значение задачи (22.1), $M^*=\left\{u\geqslant 0\colon\ \sup\limits_{x\geqslant 0} F(x,u)<+\infty\right\}$, где

$$F(x,u)=f_0(x)-\sum_{j=1}^{m}u_jf_j(x);\qquad f^*(u)=\sup_{x\geqslant 0}F(x,u).$$

Под двойственной к C будем понимать задачу

$$C^*\colon\ \inf_{u\geqslant 0}\sup_{x\geqslant 0}F(x,u)\qquad(22.1)^*$$

или эквивалентную ей задачу

$$\inf\left\{t\colon\ f(x)-\sum_{j=1}^{m}u_jf_j(x)\leqslant t,\ u_j\geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\geqslant 1\right\}.$$

Последняя имеет вид задачи ЛП с бесконечным числом ограничений.

22.1. Классификация задач ВП. Задачу (22.1) будем называть *собственной*, если

$$-\infty<\tilde{f}=\underset{\sim}{f}<+\infty,\qquad(22.2)$$

где $\underset{\sim}{f}$ — оптимальное значение задачи (22.1)*; в противном случае — *несобственной*. Если выполняется соотношение $-\infty < \tilde{f} < \underset{\sim}{f} < +\infty$, то C будем называть *полусобственной* (это задачи с *разрывом в двойственности*).

Выделим (как и в линейном случае) три класса несобственных задач ВП в зависимости от пустоты или непустоты допустимых множеств M и M^* задач C и C^* соответственно: 1) $M=\varnothing$, $M^*\neq\varnothing$; 2) $M\neq\varnothing$, $M^*=\varnothing$; 3) $M=\varnothing$, $M^*=\varnothing$. В зависимости от выполнимости свойств 1)—3) будем говорить о несобственной задаче C 1-го, 2-го или 3-го рода соответственно. Заметим, что если C разрешима и удовлетворяет условию регулярности, то она является собственной ((22.2) в этом случае выполняется в силу теоремы Куна — Таккера).

Для несобственных задач ВП не может быть дана характеризация в той форме, которая имеет место для несобственных задач ЛП. Однако справедливы формулы

$$M=\varnothing \,\&\, M^*\neq\varnothing \Rightarrow [M(\Delta b)\neq\varnothing \Rightarrow \tilde{f}(\Delta b) < +\infty], \tag{22.3}$$

где $M(\Delta b)=\{x\geqslant 0\colon\ f_j(x)\leqslant \Delta b_j,\ \ j=1,\ \ldots,\ m\}$, $\tilde{f}(\Delta b) = \sup\{f(x)\colon\ x\in M(\Delta b)\}$;

$$M\neq\varnothing \,\&\, [M(\Delta b)\neq\varnothing \Rightarrow \tilde{f}(\Delta b) < +\infty] \Rightarrow M^*\neq\varnothing; \tag{22.4}$$

$$M\neq\varnothing \,\&\, \tilde{f}=+\infty \Rightarrow M^*=\varnothing; \tag{22.5}$$

$$M\neq\varnothing \,\&\, M^*=\varnothing \Rightarrow \tilde{f}(\Delta b)=+\infty. \tag{22.6}$$

Производными от (22.5) и (22.6) являются соотношения $M=\varnothing \,\&\, \tilde{f}(\Delta b)=+\infty \Rightarrow M^*=\varnothing$; $M=\varnothing \,\&\, M^*=\varnothing \Rightarrow \tilde{f}(\Delta b)=+\infty$.

Убедимся в справедливости (22.3). Пусть $M=\varnothing$ и $M^*\neq\varnothing$. Покажем $\tilde{f}(\Delta b)<+\infty$. Допустимым множеством для двойственной к $\sup\{f(x)\colon\ x\in M(\Delta b)\}$ задачи является $M^*(\Delta b)=\{u\geqslant 0\colon\ f^*[\Delta b](u)<+\infty\}$, где

$$f^*[\Delta b](u)=\sup_{x\geqslant 0}\left[f(x)-\sum_{j=1}^{m}u_j(f_j(x)-\Delta b_j)\right].$$

Если доказать соотношение $M^*(\Delta b)\neq\varnothing$, то $\tilde{f}(\Delta b) < +\infty$ будет следовать в силу $\tilde{f}(\Delta b)\leqslant f^*[\Delta b](u)$ $\forall u\in M^*(\Delta b)$. Но так как $f^*[\Delta b](u)=f^*(u)+\sum_{j=1}^{m}u_j\Delta b_j$ и $M^*\neq\varnothing$, то и $M^*(\Delta b)\neq\varnothing$.

Справедливость (22.4) вытекает, например, из утверждения: если $\Delta b>0$ таково, что система $f_j(x)\leqslant\Delta b_j$ $(j=$

$=1, \ldots, m$) удовлетворяет условию Слейтера и при этом $\tilde{f}(\Delta b) < +\infty$, то

$$\sup_{x} \inf_{u \geqslant 0} F[\Delta b](x, u) = \inf_{u \geqslant 0} \sup_{x} F[\Delta b](x, u), \qquad (22.7)$$

где $F[\Delta b](x, u) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j [f_j(x) - \Delta b_j]$. Действительно, левая часть соотношения (22.7) равна $\tilde{f}(\Delta b)$, следовательно, функция $f^*[\Delta b](u)$ не может быть равной $+\infty$ тождественно по $u \geqslant 0$, т. е. $M^*(\Delta b) \neq \varnothing$. Но так как $M^*(\Delta b) = M^*$, то и $M^* \neq \varnothing$, что и требовалось.

Соотношение (22.5) вытекает из того, что $\tilde{f} \leqslant f^*(u)$ $\forall u \in M^*$.

Справедливость (22.6) показывается следующим примером:

$$\max\{x\colon\ g(x, y) \leqslant 0\}; \qquad (22.8)$$

здесь $[x, y] \in \mathbf{R}^2$,

$$g(x, y) = \begin{cases} xe^{4x-1}, & \text{если } x > 0,\ y \leqslant 0, \\ x + y, & \text{если } x > 0,\ y \geqslant 0, \\ (x+y)^+, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

В примере (22.8) $\tilde{f} = 0$, $M = \{[x, y] \geqslant 0\}$, $M^* = \varnothing$. Этот пример иллюстрирует отсутствие свойства $\tilde{f}$-устойчивости по ε в задаче $\max\{x\colon\ g(x, y) \leqslant \varepsilon\}$. Последнее вытекает из того, что оптимальное значение этой задачи $\tilde{f}(\varepsilon) = +\infty$ при любом $\varepsilon > 0$.

22.2. Классификация аппроксимационных семейств. Мы будем оперировать семействами $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ задач ВП и ЛП, выступающих содержательно в качестве последовательностей (или обобщенных последовательностей) для тех или иных задач оптимизации. Для определенности будем считать, что задачи P_α — это конечномерные задачи ВП на максимум, следовательно, задачи P_α^* — задачи на минимум. Эта договоренность определяет операции sup и inf в (22.9) и (22.10).

Если P — некоторая задача ВП, то в роли семейства $\mathscr{P}$ может выступать некоторая последовательность ее линейных аппроксимаций. Другой пример: пусть P — задача линейного программирования, вектор информации которой $s = [c, A, b]$ задан последовательностью своих реализаций $s_t = [c_t, A_t, b_t]$. Тогда последовательность $\{L_t\}$ задач L_t с вектором информации s_t является аппроксимирующим семейством для P.

Приведем еще пример, связанный с аппроксимацией бесконечномерной задачи линейного программирования

$$L_\infty\colon \max\left\{\sum_{i=1}^{+\infty} c_i x_i\colon \sum_{i=1}^{+\infty} a_{ji}x_i \leqslant b_j,\ j=1,\ldots,m,\ldots\right\}$$

последовательностями конечномерных задач

$$L_{m,n}\colon \max\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\colon \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leqslant b_j,\ j=1,\ldots,m\right\};$$

выше не уточняется пространство переменной $x=[x_1,\ldots$ $\ldots,x_n,\ldots]$. Наравне с семейством $\mathscr{P}$ будем оперировать семейством $\mathscr{P}^*=\{P_\alpha^*\}$, где P_α^* — задача, двойственная к P_α.

Введем обозначения $f_\alpha=\operatorname{opt}P_\alpha$, $f_\alpha^*=\operatorname{opt}P_\alpha^*$. Выделим то или иное множество Ω подпоследовательностей $\omega=\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$. Если в P_α (или P_α^*) система ограничений несовместна, то полагаем $f_\alpha=-\infty\left(f_\alpha^*=+\infty\right)$. Пусть

$$\Gamma(\omega)=\varliminf f_{\alpha_t},\quad \Gamma^*(\omega)=\varlimsup f_{\alpha_t}^*.$$

Сформулируем задачи:

$$\sup_{\omega\in\Omega}\Gamma(\omega), \tag{22.9}$$

$$\inf_{\omega\in\Omega}\Gamma^*(\omega). \tag{22.10}$$

Их оптимальные значения будем обозначать через $\tilde{f}$ и $\underset{\sim}{f}$. Выписанную формализацию проиллюстрируем на примерах приведенных выше семейств $\mathscr{L}=\{L_{m,n}\}$ и $\mathscr{L}^*=$ $=\{L_{m,n}^*\}$. В соответствии с принятыми обозначениями $f_{m,n}=\operatorname{opt}L_{m,n}$, $f_{m,n}^*=\operatorname{opt}L_{m,n}^*$. В качестве ω берется любая последовательность вида $\{(m_t,n_t)\}_{t=1}^\infty$. Тогда

$$\Gamma(\omega)=\varliminf f_{m_t,n_t},\quad \Gamma^*(\omega)=\varlimsup f_{m_t,n_t}^*.$$

В условиях ситуации задачи L_∞ в § 24 приведен пример, в котором $-\infty<\tilde{f}<\underset{\sim}{f}<+\infty$.

Перейдем непосредственно к классификации аппроксимирующих семейств $\{P_\alpha\}$. Семейство $\{P_\alpha\}$ (как объект) назовем *собственным* на Ω, если $-\infty<\tilde{f}=\underset{\sim}{f}<+\infty$. В противном случае семейство $\{P_\alpha\}$ называется *несобственным.* Легко видеть, что если L — конечномерная задача ЛП, а $\mathscr{L}=\{L_t=L\}_{t=1}^\infty$, то задача L является собственной тогда и только тогда, когда семейство $\mathscr{L}$ — собственное. Это верно и для задач ВП. Однако, если L — собственная, но не является корректной, например, по c, то ей можно поставить в соответствие несобственное аппроксимирующее семейство. Пример:

$$L\colon\ \max\{x_1\colon\ x_1\leqslant 1\}=1,\quad L_t\colon\ \sup\left\{x_1+\frac{1}{t}x_2\colon\ x_1\leqslant 1\right\}=+\infty.$$

С другой стороны, несобственная задача линейного программирования может иметь собственное аппроксимирующее семейство. Пример:

$$L\colon\ \sup\{-x_1\colon\ x_2=0\}=+\infty,$$

$$L_t=\max\left\{-x_1\colon\ -\frac{1}{t}x_1+x_2\leqslant 0,\ -\frac{1}{t}x_1-x_2\leqslant 0\right\}=0,$$

$$t=1,2,\ldots$$

Среди несобственных аппроксимирующих семейств выделим полусобственные с помощью определяющего соотношения $-\infty<\tilde{f}<\underset{\sim}{f}<+\infty$. Полусобственные семейства изучаются в § 24.

Связь собственных и несобственных аппроксимирующих семейств с вопросами корректности подчеркнем с помощью следующих теорем. Наравне с задачей (22.1) рассмотрим задачу

$$P_t\colon\ \sup\{f_0(x)\colon\ f_j(x)\leqslant t,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\geqslant 0\}.\qquad(22.11)$$

Задача C — это задача $P_t|_{t=0}=P_0$. Назовем задачу P_0 *$\tilde{f}$-устойчивой* по t справа в точке $t=0$, если $\{f_t\}\to f_0$ при $t\to 0$ (здесь f_t — оптимальное значение задачи P_t). Возьмем $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$, где $\omega_1=\{0,0,\ldots\}$, $\omega_2=\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, при этом $t_i>0$, $\{t_i\}\to 0$.

Теорема 22.1. *Пусть (22.1) — задача выпуклого программирования. Ее аппроксимационное семейство $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ является собственным на Ω тогда и только тогда, когда задача P_0 $\tilde{f}$-устойчива по t справа.*

Доказательство. Так как, очевидно, с одной стороны $\Gamma(\omega_1)=f_0$, $\Gamma(\omega_2)=\lim f_{t_i}$, а с другой — в соответствии с леммой 20.1 из [36] — $\lim f_t=f^*$ при $t\to+0$, и согласно (4.3) $f_{t_i}=f^*_{t_i}$, то

$$\Gamma^*(\omega_1)=f^*=\lim_{t_i\to 0}f_{t_i},\quad \Gamma^*(\omega_2)=\lim_{t_i\to 0}f^*_{t_i}=\lim_{t_i\to 0}f_{t_i}.$$

Следовательно, $\tilde{f} = \max_{i=1,2} \Gamma(\omega_i) = \lim_{t_i \to 0} f_{t_i}$, $\underset{\sim}{f} = \min_{i=1,2} \Gamma^*(\omega_i) = f_0$, и эквивалентность доказана.

Задаче L (1.1) поставим в соответствие аппроксимационное семейство $\mathcal{P} = \{P_t\}$, где $s_t = [c^t, A_t, b^t] \to s = [c, A, b]$ при $t \to +\infty$ (сходимость — покоординатная). Задача L называется $\tilde{l}$*-устойчивой*, если для любого аппроксимационного семейства $\mathcal{P} = \{P_t\}$ справедливо равенство $\lim_{t \to +\infty} \tilde{l}_t = \tilde{l}_0$ (здесь $\tilde{l}_0 = \operatorname{opt} L$).

Будем считать, что (при $t = 0$) $c^0 = c$, $A_0 = A$, $b^0 = b$. По аналогии с теоремой 22.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 22.2. *Задача L $\tilde{l}$-устойчива тогда и только тогда, когда любое аппроксимирующее семейство $\mathcal{P}$ является собственным на $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, где $\omega_0 = \{0, 0, \ldots\}$, $\omega_1 = \{t\}_{t=1}^{\infty}$.*

§ 23. Двойственность для несобственных задач выпуклого программирования

Запишем исходную задачу выпуклого программирования в форме

$$P:\ \max\{f_0(x):\ f_j(x) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\ x \geqslant 0\}. \qquad (23.1)$$

Нас будет интересовать проблема двойственности, соотнесенная ситуации, когда задача (23.1) — несобственная. При этом на первый план выступает вопрос о формировании пары задач C и C^*, играющей ту же роль, что и в схеме § 6. Что касается задачи C, то она может быть сформирована по аналогии с линейным случаем:

$$C:\ \max\left\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|F_j^+(x)\|_{p(j)}:\ F_0(x) \leqslant 0,\quad x \geqslant 0,\right.$$
$$\left.\|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i,\quad i = 1, \ldots, n_0\right\}; \qquad (23.2)$$

здесь $[F_0(x), \ldots, F_{m_0}(x)] = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $R_j > 0$, $r_i > 0$ $(j = 1, \ldots, m_0;\ i = 1, \ldots, n_0)$, $\{\|\cdot\|_{p(j)}\}_1^{m_0}$ $\{\|\cdot\|_{q(i)}\}_1^{n_0}$ — два набора норм конечномерных пространств соответствующих размерностей; система неравенств $F_0(x) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$ предполагается совместной. Так как в дальнейшем нас будет интересовать только случай разрешимости задачи C, то в ней вместо sup поставлена операция max.

Построить задачу $C^{\#}$ по аналогии с линейным случаем не представляется возможным. Здесь необходим другой подход. Положим

$$M(r) = \{x \geqslant 0:\ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, n_0\},$$
$$M^{\#}(R) = \{u \geqslant 0:\ \|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j,\ j = 1, \ldots, m_0\}.$$

Выпишем задачи

$$\Gamma_{rR}:\ \max_{x \in M(r)} \min_{u \in M^{\#}(R)} F(x, u), \tag{23.3}$$

$$\Gamma^{\#}_{rR}:\ \min_{u \in M^{\#}(R)} \max_{x \in M(r)} F(x, u), \tag{23.4}$$

где $F(x, u) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$ — функция Лагранжа; связь между $u = [u_1, \ldots, u_m]$ и $\{u^j\}_{j=1}^{m_0}$ такая: $u = \left[u^0, u^1, \ldots, u^{m_0}\right]$.

23.1. Эквивалентность задач C и Γ_{rR}. Задачу C перепишем в эквивалентном виде:

$$\max\Big\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|t^j\|_{p(j)}:\ F_0(x) \leqslant 0,$$
$$F_j(x) - t^j \leqslant 0,\ \|x^i\|_{q(i)} \leqslant r_i,\ i = 1, \ldots, n_0,\ [x, t] \geqslant 0\Big\}, \tag{23.5}$$

здесь $t = \left[t^1, \ldots, t^{m_0}\right]$. Выпишем для этой задачи функцию Лагранжа:

$$F(x, t; u, v) = f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j \|t^j\|_{p(j)} -$$
$$- \sum_{j=1}^{m_0} \left(F_j(x) - t^j, u^j\right) - \left(F_0(x), u^0\right) - \sum_{i=1}^{n_0} v_i\left(\|x^i\|_{q(i)} - r_i\right).$$

Легко видеть, что

$$F(x, t; u, v) = F(x, u) + \sum_{j=1}^{m_0} F_0\left(t^j, u^j\right) - \sum_{i=1}^{n_0} v_i\left(\|x^i\|_{q(i)} - r_i\right),$$

где $F(x, u)$ — функция Лагранжа для (23.1), $F_0(t^j, u^j) = (t^j, u^j) - R_j\|t^j\|_{p(j)}$.

Для функции $F(x, t; u, v)$ выпишем пару задач

$$\Gamma: \max_{[x,t]\geqslant 0} \min_{[u,v]\geqslant 0} F(x, t; u, v), \tag{23.6}$$

$$\Gamma^*: \min_{[u,v]\geqslant 0} \max_{[x,t]\geqslant 0} F(x, t; u, v). \tag{23.7}$$

Если задача C разрешима, то, учитывая эквивалентность ее задаче (23.5), будем иметь известное (впрочем, вполне очевидное) соотношение:

$$\operatorname{opt} C = \operatorname{opt} \Gamma. \tag{23.8}$$

Если, кроме того, C — задача ВП и удовлетворяет условию регулярности (в любой форме), то согласно теореме Куна — Таккера $\operatorname{opt}\Gamma = \operatorname{opt}\Gamma^*$, следовательно, $\operatorname{opt} C = \operatorname{opt}\Gamma^*$.

Выписанные соотношения будут использованы в дальнейшем.

Теорема 23.1. *Из разрешимости C следует эквивалентность ее задаче Γ_{rR}.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости соотношения $\operatorname{opt} C = \operatorname{opt}\Gamma_{rR}$, достаточно, в силу (23.8), доказать равенство $\operatorname{opt}\Gamma = \operatorname{opt}\Gamma_{rR}$, т. е.

$$\max_{[x,t]\geqslant 0} \min_{[u,v]\geqslant 0} F(x, t; u, v) = \max_{x\in M(r)} \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, u). \tag{23.9}$$

Введем обозначение $F(x, t; u) = F(x, u) + \sum_{j=1}^{m_0} F_0(t^j, u^j)$,

так что

$$F(x, t; u, v) = F(x, t; u) - \sum_{i=1}^{n_0} v_i \left(\left\|x^i\right\|_{q(i)} - r_i\right).$$

Вполне очевидно соотношение

$$\min_{[u,v]\geqslant 0} F(x, t; u, v) =$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u\geqslant 0} F(x, t; u), \left\|x^i\right\|_{q(i)} \leqslant r_i, & i = 1, \ldots, n_0, \\ -\infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\operatorname{opt}\Gamma = \max_{\substack{t\geqslant 0\\ x\in M(r)}} \min_{u\geqslant 0} F(x, t; u). \tag{23.10}$$

Далее, убедимся в равенстве

$$\max_{\substack{t\geqslant 0\\ x\in M(r)}} \min_{u\geqslant 0} F(x, t; u) = \max_{\substack{t\geqslant 0\\ x\in M(r)}} \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, t; u). \tag{23.11}$$

Действительно, если при $[\bar{x}, \bar{t}]$ минимум в левой части (23.11) реализуется при некотором $\bar{u}$, то в силу линейности функции $F(x, t; u)$ по u любой вектор $u' \geqslant 0$ будет также точкой минимума для задачи $\min\limits_{u\geqslant 0} F(\bar{x}, \bar{t}, u)$. Поэтому на u можно наложить ограничения $\|u^j\|^*_{p(j)} \leqslant R_j$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, не изменяя соответствующего минимального значения, а значит, (23.11) справедливо. Таким образом, в силу (23.10), доказано равенство

$$\max_{[x,t]\geqslant 0}\min_{[u,v]\geqslant 0} F(x, t; u, v) = \max_{\substack{t\geqslant 0\\ x\in M(r)}}\ \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, t; u).$$

В силу (23.8) остается доказать

$$\max_{\substack{x\in M(r)\\ t\geqslant 0}}\ \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, t; u) = \max_{x\in M(r)}\ \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, u). \quad (23.12)$$

Так как $(u^j, t^j) \leqslant \|u^j\|^*_{p(j)}\cdot\|t^j\|_{p(j)}$ $(j = 1, \ldots, m_0)$, то

$$\sum_{j=1}^{m_0} F_0(u^j, t^j) = \sum_{j=1}^{m_0}\left[(u^j, t^j) - R_j\|t^j\|_{p(j)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m_0}\|t^j\|_{p(j)}\left(\|u^j\|^*_{p(j)} - R_j\right) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad u \in M^{\#}(R).$$

Отсюда $F(x, t; u) \leqslant F(x, u)$ $\forall u \in M^{\#}(R)$, $\forall t \geqslant 0$, причем $F(x, 0; u) = F(x, u)$. Следовательно,

$$\max_{\substack{x\in M(r)\\ t\geqslant 0}}\ \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, t; u) = \begin{cases} \max\limits_{x\in M(r)}\ \min\limits_{u\in M^{\#}(R)} F(x,u), & t = 0,\\ \max\limits_{x\in M(r)}\ \min\limits_{u\in M^{\#}(R)} F(x, t; u), & t > 0 \end{cases} =$$

$$= \max_{x\in M(r)}\ \min_{u\in M^{\#}(R)} F(x, u),$$

т. е. соотношение (23.12) доказано; вместе с тем доказано и равенство

$$\operatorname{opt} C = \operatorname{opt} \Gamma_{rR}.$$

23.2. Эквивалентность задач $\Gamma^{\#}_{rR}$ и Γ^*.

Теорема 23.2. *Пусть задача C разрешима. Тогда справедливо равенство*

$$\min_{[u,v]\geqslant 0}\max_{[x,t]\geqslant 0} F(x, t; u, v) = \min_{u\in M^{\#}(R)}\ \max_{x\in M(r)} F(x, u).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством предыдущей теоремы получаем

$$\min_{[u,v]\geqslant 0}\ \max_{[x,t]\geqslant 0} F(x,t;u,v) =$$
$$= \min_{\substack{u\in M^{\#}(R)\\ v\geqslant 0}}\ \max_{x\geqslant 0}\left[F(x,u)-\sum_{i=1}^{n_0} v_i\left(\|x^i\|_{q(i)}-r_i\right)\right]. \qquad (23.13)$$

Обозначим через $F(x;\ u,\ v)$ выражение, стоящее в квадратных скобках. При ограничении $x\in M(r)$ легко получается равенство

$$\min_{\substack{u\in M^{\#}(R)\\ v\geqslant 0}}\ \max_{x\in M(r)} F(x;u,v) = \min_{u\in M^{\#}(R)}\ \max_{x\in M(r)} F(x,u),$$

которое вместе с (23.13) дает доказываемое соотношение.

Пусть $[\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{v}]$ — оптимальное решение задачи в правой части соотношения (23.13), причем $\bar{x}\notin M(r)$. Тогда

$$\inf_{v\geqslant 0}\left[F(\bar{x},\bar{u})-\sum_{i=1}^{n_0} v_i\left(\|\bar{x}^i\|_{q(i)}-r_i\right)\right]=-\infty. \qquad (23.14)$$

Но так как значение $\max\limits_{[x,t]\geqslant 0}\ \min\limits_{[u,v]\geqslant 0} F(x,t;u,v)$ конечно и не превосходит $\min\limits_{[u,v]\geqslant 0}\ \max\limits_{[x,t]\geqslant 0} F(x,t;u,v)$, то с использованием равенства (23.13) получаем противоречие с (23.14). Тем самым показано, что в правой части (23.13) ограничение $x\geqslant 0$ можно заменить на $x\in M(r)$, получив доказываемое равенство.

23.3. Теорема двойственности. Мы ставили вопрос о формировании задачи $C^{\#}$ для случая несобственной задачи математического программирования P, т. е. (23.1). После теорем 23.1 и 23.2 становится ясным, что в качестве задачи, двойственной к C, естественно взять

$$C^{\#}\quad \min_{u\in M^{\#}(R)}\ \max_{x\in M(r)} F(x,u).$$

Теорема 23.3 (теорема двойственности). *Если задача выпуклого программирования C разрешима и удовлетворяет условию регулярности, то разрешима и задача $C^{\#}$, при этом их оптимальные значения совпадают.*

Доказательство в силу теорем 23.1 и 23.2 вытекает из того, что при сделанных предположениях $\operatorname{opt}\Gamma=\operatorname{opt}\Gamma^{*}$.

23.4. Частные реализации задач C и $C^{\#}$. Как и в линейном случае, пара C и $C^{\#}$ допускает много частных реализаций. Например, если $F_j(x)=f_j(x)\quad (j=1,\ \ldots\ m)$,

$x = x^1$ (т. е. $n_0 = 1$), то получается двойственная пара:

$$C_0\colon \max\{f_0(x) - (R, F^+(x))\colon\ x \geqslant 0,\ \|x\|_q \leqslant r_0\},$$

$$C_0^{\#}\colon \min_{0 \leqslant u \leqslant R}\ \max_{\substack{\|x\|_q \leqslant r\\ x \geqslant 0}} F(x, u);$$

здесь $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $r_0 > 0$, $\|\cdot\|_q$ — произвольная норма пространства $\mathbf{E}_n$. Задача C_0, очевидно, всегда разрешима и удовлетворяет условию регулярности, поэтому в силу сформулированной теоремы двойственности $\operatorname{opt} C_0 = \operatorname{opt} C_0^{\#}$.

Двойственная пара задач

$$C_1\colon \max\{f_0(x) - R_0\|F^+(x)\|_p\colon\ 0 \leqslant x \leqslant r\},$$

$$C_1^{\#}\colon \min_{\substack{\|u\|_p^* \leqslant R_0\\ u \geqslant 0}}\ \max_{0 \leqslant x \leqslant r} F(x, u)$$

получается при $F(x) = F_1(x)$, $x^i = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если в (23.2) $x^0 = x$ (x^0 определяется условием $x = [x^0, x^1, \ldots \ldots, x^{n_0}]$), то C и $C^{\#}$ запишутся следующим образом:

$$C_2\colon \max\Big\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j\|F_j^+(x)\|_{p(j)}\colon\ F_0(x) \leqslant 0,\ x \geqslant 0\Big\},$$

$$C_2^{\#}\colon \min_{u \in M^{\#}(R)}\ \max_{x \geqslant 0} F(x, u).$$

Рассмотрим еще один частный случай, отнесенный к задаче P, в ограничениях которой отсутствует требование $x \geqslant 0$, т. е.

$$\max\{f_0(x)\colon\ f_j(x) \leqslant 0,\quad j = 1, \ldots, m\}. \tag{23.15}$$

Если положить $F(x) = [F_1(x), \ldots, F_{m_0}(x)]$, т. е. компонента $F_0(x)$ отсутствует, то пара C_2 и $C_2^{\#}$ примет вид

$$C_3\colon \max\Big\{f_0(x) - \sum_{j=1}^{m_0} R_j\|F_j^+(x)\|_{p(j)}\Big\}$$

$$C_3^{\#}\colon \min_{u \in M^{\#}(R)}\ \max_{x} F(x, u).$$

В предположении $M^* = \{u \geqslant 0\colon\ \max\limits_x F(x, u) < +\infty\} \neq \varnothing$ задача $C_3^{\#}$ может быть записана в виде

$$C_{3,0}^{\#}\colon \min\{F(x, u)\colon\ 0 \in \partial_x F(x, u),\ u \geqslant 0,$$
$$\|u^j\|_{p(j)}^* \leqslant R_j,\ j = 1, \ldots, m_0\}.$$

Теорема двойственности (прямая), связывающая задачи C_3 и $C^{\#}_{3,0}$, формулируется следующим образом:

Из разрешимости задачи C_3 *следует разрешимость задачи* $C^{\#}_{3,0}$ *и* $\operatorname{opt} C_3 = \operatorname{opt} C^{\#}_{3,0}$.

23.5. Обратная теорема двойственности для задач C_3 и $C^{\#}_{3,0}$. Если задача (23.15) разрешима и удовлетворяет условию регулярности, то для нее справедлива обратная теорема двойственности в следующей формулировке (см. теорему 24.4 [36]):

Пусть функции $\{f_i(x)\}_{i=0}^{m}$ *дифференцируемы. Если задача (двойственная к* (23.15))

$$\min \{F(x, u)\colon \nabla_x F(x, u) = 0,\ u \geqslant 0\} \qquad (23.16)$$

разрешима, $[\bar{x}, \bar{u}]$ *— ее оптимальное решение и* $F(x, \bar{u})$ *строго вогнута в окрестности точки* $\bar{x}$, *то* $\bar{x}$ *— оптимальное решение задачи* (23.15) *и* $f_0(\bar{x}) = F(\bar{x}, \bar{u})$.

Доказательство, приведенное в [36], годится и для случая, когда дифференцируемость функций $\{f_i(x)\}_{i=0}^{m}$ не предполагается, но тогда в (23.16) ограничения примут вид $0 \in \partial_x F(x, u)$, $u \geqslant 0$.

Аналог приведенной обратной теоремы может быть сформулирован и для пары $C_3, C^{\#}_{3,0}$.

Теорема 23.4. *Пусть задача* $C^{\#}_{3,0}$ *разрешима и* $[\bar{x}, \bar{u}] \in \operatorname{Arg} C^{\#}_{3,0}$, $F(x, \bar{u})$ *— строго вогнута в окрестности точки* $\bar{x}$; *тогда* $\bar{x} \in \operatorname{Arg} C_3$ *и* $f_0(\bar{x}) = F(\bar{x}, \bar{u})$.

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство теоремы 24.4 [36], поэтому мы его опускаем.

§ 24. Полусобственные задачи бесконечномерного линейного и выпуклого программирования

В соответствии с классификацией из § 22 полусобственные задачи обладают свойством существования разрыва в двойственности. В данном параграфе рассматриваются полусобственные бесконечномерные линейные программы с точки зрения их аппроксимации конечными подзадачами ЛП, а также полусобственные выпуклые программы с позиций бесконечномерных линейных программ.

24.1. Аппроксимация конечными задачами ЛП. Выделим в линейном пространстве числовых последовательностей $\mathbf{R}_\infty = \{[x_1, \ldots]\}$ подпространство $\mathbf{R}'_\infty$ конечно-определенных элементов, т. е. таких элементов $[x_1, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$, для которых число отличных от нуля координат x_i конечно. Для $x = [x_1, \ldots] \in \mathbf{R}'_\infty$ положим $I(x) = \{j \in \mathbf{N}: x_j \neq 0\}$. Определим для $a = [a_1, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$ функционал (a, x) на $x \in \mathbf{R}'_\infty$ вида $(a, x) = \sum\limits_{i \in I(x)} a_i x_i$. Очевидно, функционал (a, x) линеен на $\mathbf{R}'_\infty$. Пусть заданы $a_{0.} = [a_{01}, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$, $b = [b_1, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$ и бесконечная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1j}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1}, & \ldots, & a_{ij}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

для которой обозначим $a_{i.} = [a_{i1}, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$ — i-ая строка A, $a_{.j} = [a_{1j}, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$ — j-ый столбец A.

Сформулируем пару двойственных задач бесконечномерного линейного программирования над $\mathbf{R}'_\infty$:

$$L_{\infty\infty}: \ \inf\{(a_{0.}, x): \ (a_{i.}, x) \leqslant b_i, \ i = 1, 2, \ldots\}, \tag{24.1}$$

$$L^*_{\infty\infty}: \ \sup\{(-b, y): \ (a_{.j}, y) = -a_{0j}, \ y \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots\}. \tag{24.2}$$

Выпишем аппроксимирующую подзадачу для $L_{\infty\infty}$ по подпространству переменных $x = [x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots] \in \mathbf{R}'_\infty$ в виде

$$L_{m\infty}: \ \inf\left\{\sum_{i=1}^m a_{0i}x_i: \ \sum_{i=1}^m a_{ji}x_i \leqslant b_j, \ j = 1, 2, \ldots\right\}$$

и двойственную к ней задачу $L^*_{m\infty}$ над $\mathbf{R}'_\infty$:

$$L^*_{m\infty}: \ \sup\{(-b, y): \ (a_{.k}, y) = -a_{.k}, \ y \geqslant 0, \ k = 1, \ldots, m\},$$

которая является аппроксимирующей для $L^*_{\infty\infty}$ по ограничениям.

Аналогично выпишем для $L_{\infty\infty}$ аппроксимирующую подзадачу по числу ограничений в виде

$$L_{\infty n}: \ \inf\{(a_{0.}, x): \ (a_{i.}, x) \leqslant b_i, \ i = 1, \ldots, n\}$$

и двойственную к ней задачу

$$L^*_{\infty n}: \ \sup\left\{-\sum_{i=1}^n b_i y_i: \ \sum_{i=1}^n y_i a_{i.} = -a_{0.}, y_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, n\right\}$$

— аппроксимации $L^*_{\infty\infty}$ по подпространству переменных $y = [y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots] \in \mathbf{R}'_\infty$.

Выпишем также для $L_{\infty\infty}$ и $L^*_{\infty\infty}$ аппроксимирующее семейство взаимно двойственных задач конечномерного ЛП:

$$L_{mn}\colon \inf\left\{\sum_{j=1}^{m} a_{0j}x_j\colon \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ \ i = 1, \ldots, n\right\},$$

$$L^*_{mn}\colon \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} - b_i y_i\colon \sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i = -a_{0j},\ \ y \geqslant 0,\ j=1, \ldots, m\right\}.$$

Для $\{m_k\} \to +\infty$ и $\{n_k\} \to +\infty$, полагая $\Omega = \{\omega = \{m_k, n_k\}\}$, в соответствии с § 22 (с учетом, что здесь задача на inf) определим

$$\Gamma(\omega) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, v_{m_k n_k}, \quad \Gamma^*(\omega) = \underline{\lim_{k\to\infty}}\, v^*_{m_k n_k},$$

$$\bar{v} = \sup_{\omega\in\Omega} \Gamma(\omega), \quad \underline{v} = \inf_{\omega\in\Omega} \Gamma^*(\omega),$$

где $v_{mn} = \operatorname{opt} L_{mn}$, $v^*_{mn} = \operatorname{opt} L^*_{mn}$.

Совместную систему линейных неравенств над $\mathbf{R}^n$

$$(c_k, x) \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

называют *финитно-определенной*, если для любого ее неравенства-следствия $(c, x) \leqslant b$ существует такая ее конечная подсистема, для которой оно также будет неравенством-следствием [89]. Скажем, что задача $L_{\infty\infty}$ ($L^*_{\infty\infty}$) *финитно-определена*, если, начиная с некоторого $m_0 (n_0)$, система ограничений задачи $L_{m\infty}$ ($L^*_{\infty n}$) при любом $m > m_0$ ($n > n_0$) совместна и финитно-определена.

Лемма 24.1. *Пусть задача $L_{\infty\infty}$ имеет конечное значение $v_{..}$. Тогда $v_{..} \geqslant \bar{v}$.*

Доказательство. Пусть задана произвольная последовательность $\omega = \{m_k, n_k\}$. Тогда с точки зрения вычисления значения $\Gamma(\omega) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, v_{m_k n_k}$ при $\omega = \{m_k, n_k\}$ можно считать последовательность $\{m_k\}$ такой, что возможен выбор последовательности-решения $\{x^k = [x_{k1}, \ldots, x_{km_k}, 0, \ldots,]\}$ задачи $L_{\infty\infty}$ (т. е. x^k удовлетворяет ограничениям задачи $L_{\infty\infty}$ и $\lim_{k\to\infty}(a_{0\cdot}, x^k) = v_{..}$). Очевидно, что вектор $\bar{x}^k = [x_{k1}, \ldots, x_{km_k}]$ удовлетворяет ограничениям задачи $L_{m_k\infty}$, а потому и задачи $L_{m_k n}$ при любом n. А тогда $(a_0., x^k) = \sum_{j=1}^{m_k} a_{0j}x_{kj} \geqslant v_{m_k n_k}$. Следовательно, $v_{..} = \lim_{k\to\infty}(a_0., x^k) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, v_{m_k n_k} = \Gamma(\omega)$, а потому в силу произвольности ω имеем $v_{..} \geqslant \sup_{\omega\in\Omega}\Gamma(\omega) = \bar{v}$, что и требовалось доказать.

Лемма 24.2. *Пусть задача $L_{\infty\infty}$ имеет конечное значение $v_{..}$ и финитно-определена. Тогда для любой последовательности $\{\tilde{m}_k\} \to +\infty$ существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что для $\{\tilde{n}_k > n_k\} \to +\infty$ имеет место равенство*

$$v_{..} = \bar{v} = \Gamma(\tilde{\omega}),$$

где $\tilde{\omega} = \{\tilde{m}_k, \tilde{n}_k\}$.

Доказательство. В силу $-\infty < v_{..} < +\infty$ и $\{\tilde{m}_k\} \to +\infty$ можно считать, что задача $L_{\tilde{m}_k\infty}$ имеет конечное значение $v_{m_k.}$, причем $\lim_{k\to\infty} v_{\tilde{m}_k.} = v_{..}$. В силу условия финитной определенности задачи $L_{\infty\infty}$ согласно теореме 7.13 из [89] для каждого $\tilde{m}_k$ найдется n_k такое, что $v_{\tilde{m}_k.} = v_{\tilde{m}_k\tilde{n}_k}$ при любом $\tilde{n}_k \geqslant n_k$. Следовательно, $v_{..} = \underline{\lim}_{k\to\infty} v_{\tilde{m}_k\tilde{n}_k} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, v_{m_k n_k} \leqslant \bar{v}$, а потому в силу леммы 24.1 получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Лемма 24.3. *Пусть задача $L^*_{\infty\infty}$ имеет конечное значение $v^*_{..}$. Тогда $\underline{v} \geqslant v^*_{..}$.*

Доказательство. Пусть $\{m_k\} \to +\infty$, $\{n_k\} \to +\infty$. Тогда с точки зрения вычисления $\Gamma^*(\omega) = \underline{\lim}_{k\to\infty} v^*_{m_k n_k}$ при $\omega = \{m_k, n_k\}$ можно считать последовательность $\{n_k\}$ такой, что в силу конечности значения $v^*_{..}$ возможен выбор последовательности-решения $\{y_k = [y_{k1}, \ldots, y_{kn_k}, 0, \ldots]\}$ задачи $L^*_{\infty\infty}$ (т. е. все y_k удовлетворяют ограничениям задачи $L^*_{\infty\infty}$ и $\lim_{k\to\infty}(-b, y_k) = v^*_{..}$). А тогда y_k удовлетворяет ограничениям задачи $L^*_{\infty n_k}$, а значит, и задачи $L^*_{m n_k}$ при любом m. Отсюда получаем $(-b, y_k) = -\sum_{j=1}^{n_k} b_j y_{kj} \leqslant v^*_{m_k n_k} = v_{m_k n_k}$, откуда следует

$$v^*_{..} = \lim_{k\to\infty}(-b,\ yk) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} v^*_{m_k n_k} = \Gamma^*(\omega) \quad \text{при} \quad \omega = \{m_k, n_k\},$$

что в силу произвольности в выборе $\omega = \{m_k,\ n_k\}$ и приводит к требуемому соотношению $v^*_{..} \leqslant \inf\limits_{\omega\in\Omega} \Gamma^*(\omega) = \underline{v}$.

Лемма 24.4. *Пусть задача $L^*_{\infty\infty}$ имеет конечное значение $v^*_{..}$ и финитно-определена. Тогда для любой последовательности $\{\tilde{n}_k\} \to +\infty$ существует последовательность $\{m_k\}$ такая, что для $\{\tilde{m}_k > m_k\} \to \infty$ имеет место*

$$v^*_{..} = \underline{v} = \Gamma^*(\tilde{\omega}), \quad \textit{где} \quad \tilde{\omega} = \{\tilde{m}_k, \tilde{n}_k\}.$$

Доказательство. В силу условия $-\infty < v^*_{..} < +\infty$ и $\{\tilde{n}_k\} \to +\infty$ каждая задача $L^*_{\infty\tilde{n}_k}$ имеет конечное значение $v^*_{\cdot\tilde{n}_k}$, причем, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} v^*_{\cdot\tilde{n}_k} = v^*_{..}$. В силу условия финитной определенности задачи $L^*_{\infty\infty}$ согласно ([89, теорема 7.13]) для каждого $\tilde{n}_k$ найдется m_k такое, что $v^*_{\cdot\tilde{n}_k} = v^*_{\tilde{m}_k\tilde{n}_k}$ при $\tilde{m}_k > m_k$. Следовательно,

$$v^*_{..} = \varlimsup_{k\to\infty} v^*_{\tilde{m}_k\tilde{n}_k} \geqslant \varliminf_{k\to\infty} v^*_{\tilde{m}_k\tilde{n}_k} \geqslant \underline{v}.$$

Отсюда и из леммы 24.3 и будет следовать требуемое равенство.

Отметим, что леммы 24.3, 24.4 могут быть получены из лемм 24.1, 24.2.

В соответствии с § 22 семейство задач $\{L_{mn}\}$ (здесь пара $(m;\ n)$ является параметром α в обозначениях § 22) — аппроксимирующее; $\Omega = \{\{m_t,\ n_t\}\colon \{m_t\} \to +\infty,\ \{n_t\} \to +\infty\}$ (тогда $\alpha_t = (m_t;\ n_t)$).

Теорема 24.1. *Пусть $v_{..}$ и $v^*_{..}$ конечны и задачи $L_{\infty\infty}$ и $L^*_{\infty\infty}$ финитно-определены. Тогда задача $L_{\infty\infty}$ полусобственная тогда и только тогда, когда аппроксимирующее семейство $\{L_{mn}\}$ несобственное на Ω.*

Эта теорема непосредственно следует из лемм 24.2, 24.4.

Приведем пример полусобственной задачи $L_{\infty\infty}$, для которой $L_{\infty\infty}$ и $L^*_{\infty\infty}$ финитно-определены. Положим

$$b_{i\cdot} = [1, \ldots, 1_i, 0, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$e = [1, \ldots, 1, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty,$$

$$b_{\cdot j} = [0, \ldots, 0, 1_j, 1, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Тогда задачи

$$L_{\infty\infty}\colon \inf\{t\colon (b_{i\cdot}, x) \leqslant t, \quad i = 1, 2, \ldots, \ (e, x) = 1, \\ x \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}'_\infty\},$$

$$L^*_{\infty\infty}\colon \sup\{t\colon (b_{\cdot j}, y) \geqslant t, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad (e, y) = 1, \\ y \geqslant 0, \quad y \in \mathbf{R}'_\infty\},$$

как нетрудно проверить, являются двойственными задачами ЛП над $\mathbf{R}'_\infty$ по типу (24.1), (24.2). Непосредственно проверяется: $v_{\cdot\cdot} = 1, v^*_{\cdot\cdot} = 0$. Следовательно, задача $L_{\infty\infty}$ полусобственная, причем свойство финитной определенности, очевидно, выполнено. Выберем в этом примере последовательности подзадач

$$L_{mm}\colon \inf\left\{t\colon \sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j \leqslant t, \quad i = 1, \ldots, m, \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m\right\},$$

$$L_{m+1m}\colon \inf\left\{t\colon \sum_{j=1}^{m+1} b_{ij}x_j \leqslant t, \quad i = 1, \ldots, m, \sum_{j=1}^{m+1} x_j = 1, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m+1\right\}.$$

Очевидно, что $v_{mm} = 1$, $v_{m+1m} = 0 = v^*_{m+1m}$ и потому $\Gamma(\omega) = 1$ при $\omega = \{m, m\}$ и $\Gamma^*(\overline{\omega}) = 0$ при $\overline{\omega} = \{m+1, m\}$. Следовательно, $\bar{v} \geqslant 1$, $\underline{v} \leqslant 0$, откуда следует, что $\bar{v} \neq \underline{v}$, а потому семейство $\{L_{mn}\}$ несобственное на Ω.

Условие финитной определенности задач $L_{\infty\infty}$ и $L^*_{\infty\infty}$ в теореме 24.1 существенно. Это показывает следующий пример. Выберем $a_{0\cdot} = [0, \ -1, \ 0, \ \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$, $a_{1\cdot} = [0, 1, 0, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$,

$$a_{i\cdot} = \left[-\frac{1}{i}, 1, 0, \ldots\right] \in \mathbf{R}_\infty, \quad i = 2, 3, \ldots,$$

$$b_1 = 1, \quad b_i = 0, \quad i = 2, 3, \ldots$$

и рассмотрим задачу над $\mathbf{R}'_\infty$

$$L_{\infty\infty}\colon \inf\{(a_{0\cdot}, x)\colon (a_{i\cdot}, x) \leqslant b_i, \ i = 1, 2, \ldots\},$$

которая, как легко проверить, не финитно-определенная. Двойственная к ней имеет вид

$$L^*_{\infty\infty}\colon \sup\{(-b, y)\colon (a_{\cdot j}, y) = -a_{0j}, \quad y \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots\}.$$

С одной стороны будем иметь $v_{..} = 0$, $v^*_{..} = -1$. С другой стороны, как легко проверить, имеем $\bar{v} = \underline{v} = -1$. Следовательно, $L_{\infty\infty}$ — задача полусобственная, а семейство $\{L_{mn}\}$ — собственное.

24.2. Аппроксимация задач L_∞. Здесь рассматриваются задачи ЛП над $\mathbf{R}^n$ вида

$$L_\infty\colon \inf\{(a_0, x)\colon (a_i, x) \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots\}.$$

Последняя, очевидно, погружается в задачу $L_{n\infty}$ из § 24.1. Двойственная к L_∞ совпадает с $L^*_{n\infty}$, которую обозначим L^*_∞. Задача типа L_∞ возникает, если, например, вместо индивидуальных приближенных задач $\tilde{L}_k$ вида

$$\tilde{L}_k\colon \min\{(a_0, x)\colon (a_i^k, x) \leqslant b_i^k, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

некоторой (неявной) задачи

$$L\colon \min\{(a_0, x)\colon (a_i, x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

перейти к задаче на всей совокупности приближений, т. е. к задаче

$$L\{\tilde{L}_k\}\colon \inf\{(a_0, x)\colon (a_i^k, x) \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots\}.$$

Для $L\{\tilde{L}_k\}$ по правилу перехода $L_{m\infty} \to L^*_{m\infty}$ п. 24.1 определена двойственная задача $(L\{\tilde{L}_k\})^*$ над $\mathbf{R}'_\infty$; значение последней обозначим $f^*\{\tilde{f}_k\}$. Для описанной редукции семейства $\{\tilde{L}_k\}$ к задаче $L\{\tilde{L}_k\}$ справедлива

Лемма 24.5. *Пусть $\tilde{f}_k = \operatorname{opt} \tilde{L}_k$ и $-\infty < \tilde{f}_k < +\infty$. Тогда имеют место неравенства*

$$f\{\tilde{f}_k\} \geqslant f^*\{\tilde{f}_k\} \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \tilde{f}_k,$$

где $f\{\tilde{f}_k\} = \operatorname{opt} L\{\tilde{L}_k\}$.

Действительно, левое неравенство общеизвестно, а правое неравенство следует из теоремы двойственности ЛП, согласно которой разрешима задача $\tilde{L}^*_k$ со значением $\tilde{f}^*_k = \tilde{f}_k$, и из того, что если $y_k = [y_{k1}, \ldots, y_{km}] \in \operatorname{Arg} \tilde{L}^*_k$, то вектор $\tilde{y}_k = [0, \ldots, y_{km+1} = y_{k1}, \ldots, y_{k2m} = y_{km}, 0, \ldots]$ допустим для $(L\{\tilde{L}_k\})^*$ и потому $\tilde{f}_k = \tilde{f}^*_k = (-b, \tilde{y}_k) \leqslant f^*\{\tilde{f}_k\}$ (здесь $b = [b_1^1, \ldots, b_m^1, b_1^2, \ldots] \in \mathbf{R}_\infty$), что и требовалось.

Следствие 24.1. *Пусть* $-\infty < \tilde{f}_k < +\infty$ *и любой допустимый вектор из* L *допустим для* $\tilde{L}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Тогда, если задача* $L\{\tilde{L}_k\}$ *полусобственная* (*т. е.* $+\infty > f\{\tilde{f}_k\} > f^*\{\tilde{f}_k\} > -\infty$), *то задача* L *не является* f-*устойчивой* (*здесь* $f = \operatorname{opt} L$).

Действительно, в силу условий для $\tilde{L}_k$ и L и согласно лемме 24.5 получаем неравенства

$$f \geqslant f\{\tilde{f}_k\} > f^*\{\tilde{f}_k\} \geqslant \lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k,$$

откуда и следует утверждение.

В следующем примере —

$$L\colon \min\{-x_2\colon x_2 \leqslant 1, \quad x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \geqslant 0\},$$

$$L_k\colon \min\left\{-x_2\colon x_2 \leqslant 1, -\frac{1}{k}x_1 + x_2 \leqslant 0, \right.$$
$$\left. x_1 \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots\right\}$$

— выполнены все условия следствия 24.1, при этом $f = 0$, $\tilde{f}_k = -1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $f\{\tilde{f}_k\} = 0 > f^*\{\tilde{f}_k\} = -1$.

Рассмотрим вопрос обратной редукции задачи L_∞ к семейству приближенных заданий некоторой (неявной) конечной задачи ЛП. Ниже будем считать выполненным для задачи L_∞ условие $\|[a_i, b_i]\| = 1$. Для задачи L_∞ рассмотрим аппроксимирующее семейство $\{L_m\}$:

$$L_m\colon \min\{(a_0, x)\colon (a_j, x) \leqslant b_j, \ j = 1, \ldots, m\}.$$

Двойственную к L_m задачу обозначим через L_m^*, значения задач L_m, L_m^* — через f_m, f_m^*.

Лемма 24.6. *Имеет место равенство* $f_\infty^* = \lim_{m\to\infty} f_m$ *при* $f_m \neq +\infty$; *здесь* $f_\infty^* = \operatorname{opt} L_\infty^*$.

Лемма непосредственно следует из определения задачи L_∞^* и теоремы двойственности, примененной к L_m.

Обозначим множество всех векторов $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2 \ldots)$ через A (подчеркнем, что A определяется не как последовательность).

Скажем, что разрешимая задача L_∞ (т. е. $-\infty < f_\infty < +\infty$) моделирует конечную задачу

$$L\colon \min\{(a_0, x)\colon (\tilde{a}_i, x) \leqslant \tilde{b}_i, \ i = 1, \ldots, s\}, \qquad (24.3)$$

если $\operatorname{opt} L = f = f_\infty$ и существуют последовательности $\{[a_i^t, b_i^t] \in A\}$ $(i = 1, \ldots, s)$, для которых $\lim_{t\to\infty}[a_i^t, b_i^t] = [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$.

Выписанную задачу (24.3) назовем финитной моделью для L_∞.

Очевидно, что для конечной задачи ЛП в качестве финитной модели можно взять, например, ее саму.

Теорема 24.2. *Пусть значение f_∞ конечно. Тогда существует последовательность $\{[a_i^t, b_i^t] \in A\}$ $(i = 1, \ldots, s)$ такая, что существует $\lim\limits_{t\to\infty} [a_i^t, b_i^t] = [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ и выполнено хотя бы одно из условий:*

1. *задача*

$$\min\{(a_0, x)\colon\ (\tilde{a}_i, x) \leqslant \tilde{b}_i,\ i = 1, \ldots, s\} \tag{24.4}$$

является финитной моделью для L_∞;

2. *существуют $\gamma_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ (не все равные нулю) такие, что*

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] = 0.$$

Доказательство. В условиях леммы неравенство $(a_0, x) \geqslant f_\infty$ является следствием ограничений задачи L_∞. А тогда по обобщенной лемме Фаркаша (лемма 7.4 из [89]) и лемме 7.1 из [89] будет иметь

$$[-a_0, f_\infty] = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^k [a_i^k, -b_i^k] + \gamma_0^k [0, -1] \right\} \tag{24.5}$$

при некоторых $\gamma_i^k \geqslant 0$, $[a_i^k, b_i^k] \in A$. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_0^k = 0$. Выберем для произвольного $\varepsilon > 0$ допустимый вектор x_ε задачи L_∞, для которого $(a_0, x_\varepsilon) - f_\infty < \varepsilon$. Тогда, умножив равенство (24.5) на $[x_\varepsilon, 1]$, получим

$$-\varepsilon < f_\infty - (a_0, x_\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{s} \gamma_i^k [(a_i^k, x_\varepsilon) - b_i^k] - \gamma_0^k \right\} \leqslant \\ \leqslant \varliminf_{k\to\infty} (-\gamma_0^k),$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно и $\gamma_0^k \geqslant 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_0^k = 0$. В силу условия $\|[a_i, b_i]\| = 1$ можно считать, не теряя в общности, что в соотношении (24.5) имеет место равенство $\lim\limits_{k\to\infty} [a_i^k, -b_i^k] = [\tilde{a}_i, -\tilde{b}_i]$ $(i = 1, \ldots, s)$. Рассмотрим случай, когда существуют все $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_i^k = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Тогда из (24.5) получим равенство

$$[-a_0, f_\infty] = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i [\tilde{a}_i, -\tilde{b}_i]. \tag{24.6}$$

Из определения $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$ следует, что каждое неравенство $\tilde{b}_i \geqslant (\tilde{a}_i, x)$ является следствием системы ограничений задачи L_∞, и потому из конечности f_∞ следует совместность ограничений задачи (24.4). Отсюда и из равенства (24.6) в силу теоремы двойственности ЛП следует выполнение в рассматриваемом случае условия 1.

Предположим, что рассмотренный выше случай не имеет места. Тогда $I = \left\{j\colon \varlimsup_{k\to\infty} \gamma_j^k = \infty\right\} \neq \varnothing$. Можно считать, что для $j \in I$ имеет место $\varlimsup_{k\to\infty} \gamma_j^k = \lim_{k\to\infty} \gamma_j^k = +\infty$. Выберем $l \in I$ так, чтобы для всех $j \in I$ выполнялось: $\lim_{k\to\infty} (\gamma_j^k / \gamma_l^k) < +\infty$. Тогда из (24.5) в силу $\lim_{k\to\infty} \gamma_0^k = 0$ получим

$$(\gamma_l^k)^{-1} [-a_0, f_\infty] = \sum_{i=1}^{s} (\gamma_l^k)^{-1} \gamma_i^k [a_i^k, -b_i^k] + (\gamma_l^k)^{-1} v^k \tag{24.7}$$

при некоторых $\{v^k \in \mathrm{R}^n\} \to 0$. В силу выбора $l \in I$ можно считать, что существуют $\lim_{k\to\infty} (\gamma_l^k)^{-1} \gamma_i^k = \tilde{\gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, причем $\tilde{\gamma}_l = 1$. А тогда из (24.7) следует справедливость равенства

$$\sum_{i=1}^{s} \tilde{\gamma}_i [\tilde{a}_i, -\tilde{b}_i] = 0,$$

что и означает выполнение условия 2. Лемма доказана.

Следствие 24.2. *Пусть f_∞ конечно. Если при этом существует вектор p и $\varepsilon > 0$, для которых $(a_k, p) - b_k < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то задача L_∞ моделирует некоторую финитную задачу L вида* (24.3).

Сформулированное утверждение следует из теоремы 24.2, поскольку в силу свойств вектора p исключается выполнение условия 2 теоремы 24.2.

Лемма 24.7. *Пусть значение f_∞ в задаче L_∞ конечно и задача* (24.3) *является финитной моделью для L_∞. Тогда, если $f_\infty > f_\infty^*$ (в частности, если L_∞ — полусобственная), то финитная модель* (24.3) *не является f-устойчивой.*

Доказательство. Согласно определению финитной модели для L_∞ найдутся $\{[a_i^k, -b_i^k]\in A\}$ $(i=1,\ldots,s)$, для которых $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]=\lim\limits_{k\to\infty}[a_i^k, b_i^k]$ $(i=1,\ldots,s)$. Рассмотрим задачи

$$\tilde{L}_k\colon\ \inf\{(a_0, x)\colon\ (a_i^k, x)\leqslant b_i^k,\quad i=1,\ldots,s\};$$

здесь система ограничений в силу конечности f_∞ совместна, т. е. $\operatorname{opt}\tilde{L}_k\neq+\infty$. Для каждого k можно указать t_k так, чтобы $\{t_k\}\to+\infty$ и $[a_i^k, b_i^k]\in\{[a_1, b_1],\ldots,[a_{t_k}, b_{t_k}]\}$. Тогда будем иметь

$$\tilde{f}_k\leqslant\inf\{(a_0, x)\colon\ (a_j, x)\leqslant b_j,\quad j=1,\ldots,t_k\}=f_{t_k};$$

здесь в силу конечности f_∞ справедливо $f_{t_k}\neq+\infty$. А согласно лемме 24.6 получаем $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\tilde{f}_k\leqslant\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_{t_k}=f_\infty^*<f_\infty=f$, что и требовалось доказать.

Следствие 24.3. *В условиях леммы 24.7 семейство задач $\{L_0=L,\ \tilde{L}_k\}$ является несобственным на $\Omega=\{\omega_1=\{0\},\ \omega_2=\{k\}\}$.* Это утверждение непосредственно следует из леммы 24.7 и теоремы 22.2.

24.3. Редукция минимаксных задач (в частности, задач ВП) к задачам бесконечномерного ЛП. Для произвольного множества C определим (по аналогии с $\mathbf{R}_\infty$) линейное пространство $\mathbf{R}_C$ — пространство числовых последовательностей $\mathbf{R}_C=\prod\limits_{\alpha\in C}R_\alpha$, где $\mathbf{R}_\alpha$ — поле действительных чисел. Элемент из $\mathbf{R}_C$ будем записывать так: $a=[a_\alpha]$, где $a_\alpha\in\mathbf{R}_\alpha$. Операции в $\mathbf{R}_C$ определены обычным образом (по аналогии с $\mathbf{R}_\infty$) со свойствами линейности. Для $a=[a_\alpha]\in\mathbf{R}_C$ положим $C(a)=\{\alpha\in C\colon\ a_\alpha\neq0\}$. Тогда, очевидно, множество $\mathbf{R}_C'=\{a\in\mathbf{R}_C\colon\ |C(a)|<+\infty\}$ (множество конечно-определенных элементов из $\mathbf{R}_C$) является линейным подпространством в $\mathbf{R}_C$. Для $b\in\mathbf{R}_C$ на $x\in\mathbf{R}_C'$ определим функционал $(b, x)=\sum\limits_{\alpha\in C(x)}b_\alpha x_\alpha$, который является линейным на $\mathbf{R}_C'$. Полагаем $a=[a_\alpha]\geqslant0$, если $a_\alpha\geqslant0$ $\forall\alpha\in C$. Обозначим $e_C=[e_\alpha]$ элемент R_C, для которого $e_\alpha=1$ $\forall\alpha\in C$. Пусть для некоторых множеств A и B определена матрица $F_{A\times B}=[a_{\alpha\beta}]$ и для нее поставлены задачи

$$\inf_{\alpha\in A}\sup_{\beta\in B}a_{\alpha\beta},\qquad \sup_{\beta\in B}\inf_{\alpha\in A}a_{\alpha\beta}. \tag{24.8}$$

Паре задач (24.8) поставим в соответствие пару двойственных задач (бесконечного) ЛП вида:

$$L(F_{A\times B}):\ \inf\{t:\ (a_{\cdot\beta}, x)\leqslant t,\quad (e_A, x)=1,\quad x\geqslant 0,\ x\in \mathbf{R}'_A,\quad \beta\in B\};$$

$$L^*(F_{A\times B}):\ \sup\{t:\ (a_{\alpha\cdot}, y)\geqslant t,\quad (e_B, y)=1,\quad y\geqslant 0,\quad y\in \mathbf{R}'_B,\quad \alpha\in A\},$$

которые назовем *финитно-смешанными задачами* для (24.8); здесь $a_{\cdot\beta}\in \mathbf{R}_A$ — столбец с номером β матрицы $F_{A\times B}$; $a_{\alpha\cdot}\in \mathbf{R}_B$ — строка с номером α матрицы $F_{A\times B}$. Допустимый вектор $[x_\alpha]\times t\in \mathbf{R}'_A\times\mathbf{R}\left([y_\beta]\times t\in \mathbf{R}'_B\times \mathbf{R}\right)$ задачи $L(F_{A\times B})$ (задачи $L^*(F_{A\times B})$) назовем *базисным*, если

$$x_\alpha=1 \text{ при } \alpha=\bar\alpha;\qquad x_\alpha=0 \text{ при } \alpha\neq\bar\alpha,$$

и $\bar\alpha\in A$; аналогично для задачи $L^*(F_{A\times B})$: $y_\beta=1$ при $\beta=\bar\beta$; $y_\beta=0$ при $\beta\neq\bar\beta$, и $\bar\beta\in B$. Известно, что для конечных множеств A и B (т. е. в случае, когда (24.8) является матричной игрой) задачи $L(F_{A\times B})$ и $L^*(F_{A\times B})$ всегда разрешимы и выполняется соотношение двойственности $v=v^*$, где $v=\operatorname{opt}L(F_{A\times B})$, $v^*=\operatorname{opt}L^*(F_{A\times B})$, причем разрешимость на некоторых базисных векторах (или чистых стратегиях) означает совпадение значений задач (24.8) [36]. В общем случае для финитно-смешанных задач соотношение двойственности $v=v^*$ выполняется не всегда. Это подтверждается, например, при $A=B=\{1,\ 2,\ \ldots\}$ результатами предыдущих пунктов 24.1, 24.2. При этом случай $v^*<v$ — случай *разрыва в двойственности* — в качестве самостоятельного широко не изучался. Именно этот случай рассматривается ниже с точки зрения аппроксимации задач $L(F_{A\times B})$, $L^*(F_{A\times B})$ их подзадачами $L\left(F_{A_k\times B_k}\right)$, $L^*\left(F_{A_k\times B_k}\right)$, при этом в $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ не предполагается какой-либо топологии.

Применим описанную редукцию задач (24.8) к финитно-смешанным задачам ЛП для следующей задачи:

$$\inf\{f_0(x):\ f_j(x)\leqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ m,\ x\in M\}. \tag{24.9}$$

Оптимальное значение v задачи (24.9) полагаем равным ∞, если ее допустимое множество пусто. Положим $\Phi(x,\ u)=f_0(x)+\sum\limits_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$ — функция Лагранжа задачи (24.9). Пусть $X\subset M$, $U\subset \mathbf{R}^m_+=\{u\geqslant 0\}$ и пусть

$f_{xu} = \Phi(x, u)$, $\Phi_{X\times U} = [f_{xu}]$. Рассмотрим задачу

$$\inf_{x\in X}\sup_{u\in U}\{f_{xu} = \Phi(x, u)\}$$

и обобщенно двойственную к ней

$$\sup_{u\in U}\inf_{x\in X}\{f_{xu} = \Phi(x, u)\}. \qquad (24.9)^*$$

Пусть $\tilde v(X, U)$ и $\tilde v^*(X, U)$ — оптимальные значения этих задач. Нетрудно проверить, что $\tilde v(M, \mathbf{R}^m_+) = v$. Соответствующие им финитно-смешанные задачи могут быть записаны в виде

$$L(\Phi_{X\times U})\colon \inf\Big\{t\colon \sum_{x\in X(\lambda)} f_{xu}\lambda_x \leqslant t,\quad (e_X, \lambda) = 1,$$
$$\lambda \geqslant 0,\quad \lambda\in \mathbf{R}'_X,\quad u\in U\Big\},$$

$$L^*(\Phi_{X\times U})\colon \sup\Big\{t\colon \sum_{u\in U(\alpha)} f_{xu}\alpha_u \geqslant t,\quad (e_U, \alpha) = 1,$$
$$\alpha \geqslant 0,\quad \alpha\in \mathbf{R}'_U,\quad x\in X\Big\}.$$

Обозначим через $v(X, U)$, $v^*(X, U)$ оптимальные значения выписанных выше задач соответственно, при этом полагаем $v(X, U) = +\infty$, $v^*(X, U) = -\infty$, если соответствующие системы ограничений несовместны.

Лемма 24.8. *Пусть множество U выпукло и $v^*(X, U) > -\infty$. Тогда существует последовательность базисных векторов $\{[\alpha^k_u]\times t^k\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} t^k = v^*(X, U)$.*

Действительно, в силу условий леммы существует последовательность допустимых векторов $\{[\bar\alpha^k_u]\times t^k\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} t^k = v^*(X, U)$. А тогда для $u^k = \sum_{u\in U(\bar\alpha^k)} u\bar\alpha^k_u \in U$, как нетрудно проверить, вектор $[\alpha^k_u]\times t^k$, где $\alpha^k_u = 1$ при $u = u^k$ и $\alpha^k_u = 0$ при $u \neq u^k$ является базисным, а последовательность $\{[\alpha^k_u]\times t^k\}$ — искомой.

Лемма 24.9. *Пусть задача (24.9) является задачей ВП и множество X — выпуклое. Тогда, если $v(X, U) < +\infty$, то существует последовательность базисных векторов $\{[\lambda^k_x]\times t^k\}$ задачи $L(\Phi_{X\times U})$ такая, что $\lim_{k\to\infty} t^k = v(X, U)$. Если при этом $X = M$, $U = \mathbf{R}^m_+$, то те x^k, для которых $\lambda^k_{x^k} = 1$, являются допустимыми для задачи (24.9)* *и* $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x^k) = v = v\left(M, \mathbf{R}_+^m\right)$; *обратно, если* x^k *допустимы для* (24.9), *то вектор* $\left[\lambda_x^k\right]\times t^k$, *где* $t^k = f_0(x^k)$, $\lambda_x^k = 1$ *при* $x = x^k$ *и* $\lambda_x^k = 0$ *при* $x \neq x^k$, — *базисный.*

Докажем сначала второе утверждение. Действительно, в этом случае в силу $f_j(x^k) \leqslant 0$ имеем:

$$\sum_{x\in X(\lambda)} f_{xu}\lambda_x^k = f_{x^k u} = f_0(x^k) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(x^k) \leqslant$$
$$\leqslant f_0(x^k) = t^k, \quad u \in U \subset \mathbf{R}_+^m,$$

откуда и вытекает требуемое. Далее, поскольку $v(X, U) < +\infty$, то для $L(\Phi_{X\times U})$ существуют допустимые векторы $\left[\bar\lambda_x^k\right]\times t^k$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} t^k = v(X, U)$. Но в силу выпуклости $f_j(x)$ и множества X получаем для $x^k = \sum\limits_{x\in X(\bar\lambda^k)} x\bar\lambda_x^k$

$$f_{x^k u}\bar\lambda_{x^k}^k \leqslant \sum f_{xu}\bar\lambda_x^k \leqslant t^k \quad \forall u \in U; \tag{24.10}$$

где $\lambda_{x^k}^k = 1$. А тогда вектор $\left[\lambda_x^k\right]\times t^k$, где $\lambda_x^k = 1$ при $x = x^k$ и $\lambda_x^k = 0$ при $x \neq x^k$, является искомым базисным, что и требовалось показать. Если при этом $M = X$ и $\mathbf{R}_+^m = U$, то из (24.10) следует неравенство

$$f_0(x^k) + \sum_{j=1}^m f_j(x^k) u_j \leqslant t^k \quad \forall u \in \mathbf{R}_+^m,$$

и потому $f_j(x^k) \leqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, $\lim f_0(x^k) \leqslant \lim t^k$, что вместе с доказанным выше и означает $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x^k) = v$. Лемма доказана.

Задачи $L\left(\Phi_{M\times\mathbf{R}_+^m}\right)$ и $L^*\left(\Phi_{M\times\mathbf{R}_+^m}\right)$, как легко убедиться, могут быть сведены к задачам бесконечномерного ЛП вида

$$\inf\left\{\sum_{x\in M(\lambda)} f_0(x)\lambda_x:\ \sum_{x\in M(\lambda)} f_j(x)\lambda_x \leqslant 0, \quad (e_M, \lambda) = 1,\right.$$
$$\left.\lambda \geqslant 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}'_M, \quad j = 1, \ldots, m\right\}, \tag{24.11}$$

$$\sup\left\{u_{m+1}:\ f_0(x) + \sum_{j=1}^m f_j(x) u_j \geqslant u_{m+1}, \quad x \in M,\right.$$
$$\left.u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m\right\}. \tag{24.12}$$

Лемма 24.10. *Если* $\bar{u}=[\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m]$ *и* $\bar{u}_{m+1}$ *удовлетворяют ограничениям* (24.12), *то вектор* $[\alpha_u]\times\bar{u}_{m+1}$, *где* $\alpha_u=1$ *при* $u=\bar{u}$ *и* $\alpha_u=0$ *при* $u\neq\bar{u}$, *является базисным в задаче* $L^*\left(\Phi_{M\times\mathbf{R}_+^m}\right)$. *Обратно: пусть вектор* $[\bar{\alpha}_u]\times\bar{t}$ — *базисный в задаче* $L^*\left(\Phi_{M\times\mathbf{R}_+^m}\right)$, *тогда вектор* $\bar{u}$, *для которого* $\bar{\alpha}_{\bar{u}}=1$ *и* $\bar{u}_{m+1}=t$, *удовлетворяет ограничениям задачи* (24.12).

Справедливость этой леммы проверяется непосредственно, исходя из определений.

Лемма 24.11. *Если вектор* $[\bar{\lambda}_x]$ *допустим в* (24.11), *то вектор* $[\bar{\lambda}_x]\times\bar{t}$ *при* $\bar{t}=\sum_{x\in M(\bar{\lambda})}\bar{\lambda}_x f_0(x)$ *допустим для* $L\left(\Phi_{M\times\mathbf{R}_+^m}\right)$. *Обратно: если вектор* $[\bar{\lambda}_x]\times\bar{t}$ *допустим для* $L\left(\Phi_{M\times\mathbf{R}_+^m}\right)$, *то вектор* $[\bar{\lambda}_x]$ *допустим в* (24.11), *причем* $\bar{t}\geqslant\sum_{x\in M(\lambda)}\bar{\lambda}_x f_0(x)$.

Справедливость первого утверждения очевидна. Покажем справедливость второго утверждения. Неравенства

$$\sum_{x\in M(\bar{\lambda})}\bar{\lambda}_x\left[f_0(x)+\sum_{j=1}^{m}f_j(x)\,u_j\right]\leqslant t \quad \forall u\in\mathbf{R}_+^m$$

перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{x\in M(\bar{\lambda})}\bar{\lambda}_x f_j(x)\right]u_j+\sum_{x\in M(\bar{\lambda})}\bar{\lambda}_x f_0(x)\leqslant t \quad \forall u\in\mathbf{R}_+^m.$$

Отсюда получаем соотношения

$$\sum_{x\in M(\bar{\lambda})}\bar{\lambda}_x f_j(x)\leqslant 0, \quad j=1,\ldots,m, \qquad \sum_{x\in M(\bar{\lambda})}\bar{\lambda}_x f_0(x)\leqslant t,$$

которые и доказывают требуемое утверждение.

24.4. Неустойчивые финитные модели для полусобственных задач ВП. В этом пункте рассматривается задача ВП (24.12) с разрывом в двойственности, т. е. с условием $v^*<v$, при этом ниже считаем, что $M=\mathbf{R}^n$. Возьмем произвольный конечный набор векторов $\{x_s, \ldots, x_1\}\subset\mathbf{R}^n$ и

для него рассмотрим конечную подзадачу из (24.12):

$$\sup\left\{u_{m+1}\colon\ f_0(x_i)+\sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\,u_j\geqslant u_{m+1},\right.$$
$$\left. u_j\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,s,\quad j=1,\ldots,m\right\}.\qquad(24.13)$$

Лемма 24.12. *Пусть в задаче* (24.9) *значение* $v\neq\neq+\infty$ *и* $M=\mathbf{R}^n$. *Тогда имеет место соотношение*

$$v=\inf\{v^*(x_1,\ \ldots,\ x_s)\colon\ \{x_1,\ \ldots,\ x_s\}\subset\mathbf{R}^n,\ s=1,\ 2,\ \ldots\},$$

где $v^*(x_1,\ \ldots,\ x_s)$ — *значение задачи* (24.13).

Доказательство. В силу теоремы двойственности ЛП имеем

$$v^*(x_1,\ldots,x_s)=\inf_{\alpha}\left\{\sum_{i=1}^{s} f_0(x_i)\,\alpha_i\colon\ \alpha_i\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,s,\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1,\ \sum_{i=1}^{s} f_j(x_i)\,\alpha_i\leqslant 0,\quad j=1,\ldots,m\right\}.\qquad(24.14)$$

Отсюда заключаем, что, если последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ удовлетворяет соотношениям $f_j(\tilde{x}_k)\leqslant 0$ $(j=1,\ldots,m)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(\tilde{x}_k)=v$ (такая последовательность существует в силу $v\neq+\infty$; равенство $v=-\infty$ не исключается), то $v==\inf\limits_k v^*(\tilde{x}_k)$. А тогда легко проверить в силу выпуклости $f_i(x)$ и вида задачи (24.14), что $v\leqslant v^*(x_1,\ \ldots,\ x_s)$ для любого набора $\{x_1,\ \ldots,\ x_s\}$. Последнее неравенство вместе с предыдущим равенством и делают утверждение леммы очевидным.

Теорема 24.3. *Разрыв в двойственности* $v^*<v$ *для задач ВП* (24.9) *отсутствует тогда и только тогда, когда* $v^*=\inf\limits_{\{x_1,\ldots,x_s\}} v^*(x_1,\ldots,x_s)$ (*т. е. когда значение задачи* (24.12) *с бесконечным числом ограничений асимптотически аппроксимируется значениями ее конечных подзадач вида* (24.13)).

Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 24.12.

Рассмотрим задачу (24.12) как задачу L_∞ из § 24.2: при этом, как нетрудно видеть, в качестве L_∞^* будет выступать задача (24.11). Тогда $v>v^*$ означает в терминах задач L_∞ и L_∞^* разрыв в двойственности для них, и по аналогии с § 24.2 рассмотрим в этом случае вопрос о существовании для задачи (24.12) (как L_∞) ее финитной модели.

Теорема 24.4. *Пусть значение v задачи* (24.9) *конечно и система ограничений двойственной задачи совместна* (*т. е.* $v^* \neq -\infty$). *Тогда, если $v^* < v$, то для некоторой последовательности $\{x^k\}$ справедливы утверждения* $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x^k) = v^*$, $\bar J\{x^k\} = \left\{j\colon\ 0 \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} f_j(x^k) = a_j > -\infty\right\} \neq \emptyset$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_j(x^k) = -\infty$ *при* $j \notin \bar J(x^k)$ *и для любого* $J \subset \bar J\{x^k\}$ *выполняется равенство*

$$v^* = \max\left\{u_{m+1}\colon\ u_j \geqslant 0, v^* + \sum_{j\in J} a_j u \geqslant u_{m+1},\ j \in J\right\},$$

причем $J_0\{x^k\} = \{j \in \bar J\{x^k\}\colon\ f_j(x^k) > 0,\ a_j = 0,\ k = 1, 2, \ldots\} \neq \emptyset$ *и* $v^* < v < \overset{*}{v}_k(J)$, *как только* $J_0\{x^k\} \subset J$, *где*

$$\overset{*}{v}_k(J) = \max\left\{u_{m+1}\colon\ f_0(x^k) + \sum_{j\in J} f_j(x^k) u_j \geqslant u_{m+1},\right.$$

$$\left. u_j \geqslant 0,\quad j \in J\right\}.$$

Доказательство. Положим $\Phi(x, u) = f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j f_j(x)$. Запишем известное соотношение (легко проверяемое непосредственно)

$$v^* = \sup_{u\geqslant 0} \inf_x \Phi(x, u) \leqslant \inf_x \sup_{u\geqslant 0} \Phi(x, u) = v.$$

Отсюда в силу конечности v и $v^* \neq \infty$ следует, что значение v^* конечно. А тогда неравенство $v^* u_0 \geqslant u_{m+1}$ является согласно лемме 7.1 работы [89] следствием системы

$$\begin{gathered} f_0(x) u_0 + \sum_{j=1}^{m} f_j(x) u_j \geqslant u_{m+1}, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \\ u_j \geqslant 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{24.15}$$

При этом из определения значения v^* следует, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $(v^* - \varepsilon) u_0 \geqslant u_{m+1}$ не является следствием выписанной системы. Отсюда согласно обобщенной лемме Фаркаша (см. лемму 7.4 из [89]) существуют $[\gamma_0^k, \ldots, \gamma_m^k] \geqslant 0$, $\left[\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{s_k}^k\right] \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{s_k} \alpha_i^k = 1$,

$\left\{x_1^k, \ldots, x_{s_k}^k\right\} \subset \mathbf{R}^n$ $(k=1, 2, \ldots)$ такие, что имеет место векторное равенство

$$[v^*, 0, \ldots, 0, -1] = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{m} \gamma_j^k [0, \ldots, 1_j, \ldots, 0] + \right.$$
$$\left. + \gamma^k \sum_{i=1}^{s_k} \alpha_i^k \left[f_0(x_i^k), \ldots, f_m(x_i^k), -1 \right] \right\}.$$

Введем обозначения: $x^k = \sum_{i=1}^{s_k} \alpha_i^k x_i^k$, $\delta_j^k = \sum_{i=1}^{s_k} \alpha_i^k f_j(x_i^k) - f_j(x^k) \geqslant 0$ $(j=0, 1, \ldots, m, k=1, 2, \ldots)$. Тогда последнее векторное равенство запишется в виде

$$[v^*, \ 0, \ \ldots, \ 0, -1] = \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{m} (\gamma_j^k + \delta_j^k \gamma^k) \times \right.$$
$$\left. \times [0, \ldots, 1_j, \ldots 0] + \gamma^k \left[f_0(x^k), \ldots, f_m(x^k), -1 \right] \right\}. \tag{24.16}$$

Предположим, что $\gamma_0^k + \delta_0^k > \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого k_0. Тогда, как нетрудно видеть, соотношение (24.16) сохранится, если в нем заменить v^* на $v^* - \varepsilon$, а $\gamma_0^k + \delta_0^k \gamma^k$ — на $\gamma_0^k + \delta_0^k \gamma^k - \varepsilon$. Но это означает, что неравенство $(v^* - \varepsilon) u_0 \geqslant u_{m+1}$ является следствием системы (24.15), что, как было отмечено, невозможно. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} (\gamma_0^k + \delta_0^k) = 0 = \gamma_0$ и потому согласно (24.16) получаем равенство $\lim_{k\to\infty} f_0(x^k) = v^*$. Из полученного равенства, смысла величины v и условия $v^* < v$ следует, что для некоторого $j' \in \mathrm{N}_m$ можно считать выполненным неравенство $f_{j'}(x^k) > 0$ $(k=1, 2, \ldots)$, а потому в силу (24.16) имеют место равенства

$$\lim_{k\to\infty} f_{j'}(x^k) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} (\gamma_{j'}^k + \delta_{j'}^k) = 0. \tag{24.17}$$

Соотношения (24.17) позволяют определить непустое множество

$$\overline{J}\{x^k\} = \left\{ j \in \mathrm{N}_m \colon \lim_{k\to\infty} (\gamma_j^k + \delta_j^k) = \gamma_j < +\infty \right\},$$

причем можно считать, что выполнено свойство

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\left(\gamma_j^k+\delta_j^k\right)=+\infty$ для $j\in N_m\backslash \bar{J}\{x^k\}$ (оно следует из того, что можно выделить подпоследовательность $\{k_t\}\subset\{k\}$ с названным свойством и того, что соотношения (24.16) и (24.17) будут выполняться и для $\{k_t\}$). Будем считать $\bar{J}\{x^k\}=\{1, \ldots, s\}$. Тогда в силу (24.16) будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} f_j\left(x^k\right)=-\gamma_j, \quad j=1, \ldots, s;$$

$$\lim_{k\to\infty} f_j\left(x^k\right)=-\infty,\ j=s+1, \ldots, m.$$

Следовательно, для любого $l\leqslant s$ справедливо векторное равенство $[v^*, 0, \ldots, 0, -1]=\sum\limits_{j=0}^{l}\gamma_j\,[0, \ldots, 1_j, \ldots, 0]+ [v^*, -\gamma_1, \ldots, -\gamma_l, -1]$, которое в силу $\gamma_0=0$ означает, что для любого $l\leqslant s$ выполняется соотношение

$$v^*=\max\left\{u_{m+1}\colon\ u_j\geqslant 0,\ j=1, \ldots, l,\quad v^*+\sum_{j=1}^{l}-\gamma_j u_j\geqslant u_{m+1}\right\}.$$

Согласно (24.17) подмножество $J_0\{x^k\}$ содержит j'. Пусть $J_0\{x^k\}=\{1, \ldots, s_0\}$; тогда, очевидно, можно считать $f_j\{x^k\}\leqslant 0$ для $j=s_0+1, \ldots, m$. Согласно лемме 24.12 имеет место неравенство $v^*(x^k)\geqslant v$. Поэтому можно найти такие допустимые векторы $\left[u_1^k, \ldots, u_{m+1}^k\right]$ для задачи $v^*(x^k)$ (см. (24.13)), для которых $u_{m+1}^k\geqslant v$. Отсюда и из $f_j(x^k)\leqslant 0$ $(j=l+1, \ldots, m)$ вытекают неравенства для $l\geqslant s_0$:

$$f_0\left(x^k\right)+\sum_{j=1}^{l} f_j\left(x^k\right)u_j^k\geqslant u_{m+1}^k-\sum_{j=l+1}^{m} f_j\left(x^k\right)u_j^k\geqslant u_{m+1}^k\geqslant v.$$

Следовательно, вектор $\left[u_1^k, \ldots, u_l^k, \bar{u}_{m+1}^k\right]$ при $\bar{u}_{m+1}^k= u_{m+1}^k-\sum\limits_{j=l+1}^{m} f_j\left(x^k\right)u_j^k$ и $l\geqslant s_0$ является допустимым для задачи $\overset{*}{v}_k(1, \ldots, l)$ в доказываемой теореме, и потому $v_k^*(1, \ldots, l)\geqslant v$ при $l\geqslant s_0$. Для завершения доказательства осталось положить

$$J=\{1, \ldots, l\},\quad s_0\leqslant l\leqslant s,\quad a_j=-\gamma_j,\quad j\in J.$$

Отметим, что в первой части теоремы случай $J=\varnothing$ не исключается, а требование включения $J_0\{x^k\}\subset J$ во второй части теоремы является существенным. В случае $v=v^*$ для последовательности $\{z^k\}$, выбранной из условий

$$f_j(z^k)\leqslant 0,\quad j=1,\ldots,m,\quad \lim_{k\to 0} f_0(z^k)=v$$

не следует $\bar{J}\{z^k\}\neq\varnothing$.

Следствие 24.4. *Пусть последовательность $\{x^k\}$ выбрана согласно теореме 24.4. Тогда, если при этом для некоторых $p\in\mathbf{R}^n$ и $l\in J_0\{x^k\}$ выполняется неравенство $f_l(p)<0$, то существует последовательность $\{y^k\}$, также удовлетворяющая теореме 24.4, и для нее $f_l(y^k)=0$, причем $y^k=\alpha^k x^k+(1-\alpha^k)p$, при некоторых $0\leqslant\alpha^k\leqslant 1$, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k=1$.*

Доказательство. Так как $l\in J_0\{x^k\}$, то $f_l(x^k)>0$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ и потому в силу $f_l(p)<0$ и выпуклости $f_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ получаем, что при некотором $0<\alpha^k<1$ имеет место $f_l(y^k)=0$. Следовательно, имеем неравенство

$$0=f_l(y^k)\leqslant\alpha^k f_l(x^k)+(1-\alpha^k)f_l(p),$$

из которого в силу $\lim\limits_{k\to\infty} f_l(x^k)=0$ и $f_l(p)<0$ следует $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^k=1$ и поэтому справедливы соотношения:

$$\varlimsup_{k\to\infty} f_0(y^k)\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\{\alpha^k f_0(x^k)+(1-\alpha^k)f_0(p)\}=v^*,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} f_j(y^k)\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\{\alpha^k f_j(x^k)+(1-\alpha^k)f_j(p)\}=a_j\leqslant 0,\qquad j\in\bar{J}\{x^k\},$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} f_j(y^k)\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\{\alpha^k f_j(x^k)+(1-\alpha^k)f_j(p)\}=-\infty,\qquad j\notin\bar{J}\{x^k\}.$$

Положим $\bar{\gamma}_0^k=v^*-f_0(y^k)$, $\bar{\gamma}_j^k=-f_j(y^k)$ $(j=1,\ldots,m)$ и пусть $J^-=\{j\in\mathbf{N}_m:\bar{\gamma}_j^k<0,\ k=1,2,\ldots\}$. Тогда очевидно, для $j\in J^-$ имеет место $0\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty} f_j(y^k)=a_j\leqslant 0$ или $\lim\limits_{k\to\infty} f_j(y^k)=0$. Считая $J^-=\{l+1,\ldots,m\}$, легко убедиться в справедливости векторного равенства над $\mathbf{R}^{m+2}$

$$[v^*, 0, \ldots, 0, -1] = \lim_{k\to\infty} \Big\{ [f_0(y^k), \ldots, f_m(y^k), \ -1] + \\ + \sum_{j=1}^{l} \bar{\gamma}_j^k [0, \ldots, 1_j, \ldots, 0] \Big\}. \qquad (24.18)$$

Здесь можно считать $\bar{\gamma}_j^k \geqslant 0$ при $j \in \mathbf{N}_m \setminus J^-$. Отсюда заключаем, что неравенство $v^* > u_{m+1}$ является следствием системы

$$f_0(y^k) + \sum_{j=1}^{m} f_j(y^k) u_j \geqslant u_{m+1},$$

$$u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

А тогда в силу определения v^* вытекает, что $\overline{\lim_{k\to\infty}} \bar{\gamma}_0^k = 0$ или $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(y^k) = v^*$. Следовательно, последовательность $\{y^k\}$ и соотношения (24.18) удовлетворяют всем аналогичным условиям соотношения (24.16) в доказательстве теоремы 24.4. Поэтому дальнейшее доказательство данного утверждения для $\{y^k\}$ может быть проведено по схеме доказательства теоремы 24.4, причем справедливо $f_l(y^k) = 0$.

Теорема 24.4 говорит о том, что двойственная задача (24.12) в случае полусобственной задачи (24.9) моделирует некоторую неустойчивую задачу конечномерного ЛП. Из следствия 24.4 легко получить, что в случае $v^* < v$ — разрыва в двойственности — исключается выполнение условия Слейтера: $\exists p \in \mathbf{R}^n$: $f_j(p) < 0$ $(j \in \mathbf{N}_m)$.

§ 25. Интервал разрыва в двойственности; замыкающие финитно-смешанные задачи

В этом параграфе путем сведения задачи ВП к финитно-смешанной задаче (см. § 22) показывается, что каждое значение из интервала разрыва в двойственности является значением некоторой ее подзадачи, а любая нижняя граница названного интервала является значением некоторой замыкающей задачи (определение которой дано ниже).

25.1. Интервал разрыва в двойственности. Согласно леммам 24.8, 24.9 для $X \subset M$ и $U \subset \mathbf{R}_+^m$ выполняются равенства $\tilde{v}(X, U) = v(X, U)$, $\tilde{v}^*(X, U) = v^*(X, U)$, $v^* =$

$= v^*(M, \mathbf{R}_+^m)$, $v = v(M, \mathbf{R}_+^m)$. В случае $v^* < v$ интервал $(v^*;\ v) \subset \mathbf{R}$ назовем интервалом разрыва в двойственности. Пусть M_k $(k \in \mathbf{N})$ — выпуклые компактные множества такие, что $M_{k+1} \supset M_k$, $M = \bigcup\limits_k M_k$. Для ω и $k \in \mathbf{N}$ положим

$$F_\omega^k = \{f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x), f_0(x) - \omega] \in \mathbf{R}^{m+1},\ x \in M_k\},$$
$$e_i = [0, \ldots, 1_i, \ldots, 0], \qquad i \in \mathbf{N}_{m+1}.$$

Всюду ниже задача (24.9) предполагается задачей ВП. Отметим очевидное равенство $v(M,\ \{0\}) = \inf\{f_0(x):\ x \in \in M\}$.

Лемма 25.1. *Если* $v(M, \mathbf{R}_+^m) > \omega > v(M, \{0\})$, *то начиная с некоторого* k_ω *для системы линейных неравенств вида*

$$\begin{aligned} &(e_i, u) \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m+1, \\ &(f(x), u) \geqslant 0 \qquad (f(x) \in F_\omega^k) \end{aligned} \tag{25.1}$$

существует такое решение $u^{k\omega} = [u_1^{k\omega}, \ldots, u_{m+1}^{k\omega}] \geqslant 0$, *для которого* $u_{m+1}^{k\omega} > 0$ *и*

$$F(u^{k\omega}) = \{f(x) \in F_\omega^k:\ (f(x), u^{k\omega}) = 0\} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Предположим, что для всех решений системы (25.1) имеет место $u_{m+1} \leqslant 0$. Ниже будет показано, что система (25.1) финитно-определена. А тогда существует некоторая подсистема

$$(e_i, u) \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m+1,$$
$$(f(y_i), u) \geqslant 0, \quad f(y_i) \in F_\omega^k, \qquad i = 1, \ldots, s,$$

системы (25.1), для которой неравенство $u_{m+1} \leqslant 0$ является следствием. Тогда по лемме Фаркаша при некоторых $\gamma_i \geqslant 0$ и $\beta_i \geqslant 0$ имеет место равенство

$$-e_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \gamma_i e_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j f(y_j), \tag{25.2}$$

причем $\beta = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j > 0$ (в противном случае равенство (25.2) было бы противоречивым), и потому, не теряя в общности, можно считать, что $\beta = 1$. А тогда для $\bar{y} = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j y_j \in M_k$ в силу выпуклости функции $f_i(x)$ из

(25.2) получаем

$$f_j(\bar{y}) \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\ \bar{y} \in M,\ f_0(\bar{y}) \leqslant \omega - 1,$$

что противоречит как случаю $v(M, \mathbf{R}^m_+) = +\infty$, так и выбору $\omega < v(M, \mathbf{R}^m_+) < +\infty$. Следовательно, сделанное предположение неверно, а потому существует решение $u^0 = [u^0_1, \ldots, u^0_{m+1}] \geqslant 0$ системы (25.1) такое, что $u^0_{m+1} > 0$. Поскольку $\omega > v(M, \{0\})$, то, начиная с некоторого k_ω, найдется $y \in M_k$, $k > k_\omega$, для которого $f_0(y) < \omega$. А тогда для $u(t) = u^0 + te_{m+1}$, начиная с некоторого $\bar{t}$, имеет место $(f(y), u(t)) < 0$ при $t > \bar{t}$; здесь $f(y) \in F^k_\omega$, $k > k_\omega$. Итак, вектор, $u(0) = u^0$ решает систему (25.1), а вектор $u(\bar{t})$ не является ее решением. Поэтому можно указать такое t^0, что $u(t^0)$ является решением для (25.1), а $u(t)$ при $t > t^0$ не является таковым. Пусть $\{t_s > t^0\} \to t^0$. Тогда, так как $(e_i, u(t)) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m+1$, то для каждого t_s найдется вектор $f(x_s) \in F^k_\omega$, для которого $(f(x_s), u(t_s)) < 0$, $s \in \mathbf{N}$. Поскольку M_k — компакт, а выпуклые функции $f_i(x)$ на $\mathbf{R}^n$, как известно, являются непрерывными, то $\{x_s\}' \neq \varnothing$ и для всех $\bar{x} \in \{x_s\}'$ справедливо: $f(\bar{x}) \in F^k_\omega$, $(f(\bar{x}), u(t^0)) \leqslant 0$. С другой стороны, $(f(\bar{x}), u(t^0)) \geqslant 0$, поэтому $(f(\bar{x}), u(t^0)) = 0$. Следовательно, если положить

$$u^{k\omega} = u(t^0) = u^0 + t^0 e_{m+1} = [u^{k\omega}_1, \ldots, u^{k\omega}_{m+1}],$$

то $u^{k\omega}_{m+1} > 0$ и $f(\bar{x}) \in F(u^{k\omega})$, что и требовалось доказать.

Покажем финитную определенность системы (25.1). Для этого достаточно показать справедливость равенства $\operatorname{cone} F^k_\omega = \overline{\operatorname{cone}} F^k_\omega$, для чего, в свою очередь, достаточно показать выполнение условий: 1) $\operatorname{co} F^k_\omega$ — компакт; 2) $0 \notin \operatorname{co}\{F^k_\omega, e_i, i \in \mathbf{N}_{m+1}\}$. Действительно, начиная с k_0, множество F^k_ω непустое и компактное, а потому в силу непрерывности выпуклых функций будет компактно и множество $\operatorname{co} F^k_\omega$. Покажем 2). Предположим противное, т. е. $0 \in \operatorname{co}\{F^k_\omega, e_i, i \in \mathbf{N}_{m+1}\}$. Нетрудно видеть, что в силу 1) множество $\operatorname{co}\{F^k_\omega, e_i, i \in \mathbf{N}_{m+1}\}$ компактно. А тогда при некоторых $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, l$, $x_i \in M_k$, $i = m+2, \ldots, l$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$ имеет место равенство

$$0 = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i e_i + \sum_{i=m+2}^{l} \alpha_i f(x_i). \tag{25.3}$$

Отсюда следует, что $\alpha_{m+2}+\ldots+\alpha_l=\alpha>0$ и потому можно считать $\alpha=1$. Положим $\bar{y}=\sum_{i=m+2}^{l}\alpha_i x_i$, тогда в силу выпуклости функций $f_i(x)$ из (25.3) получаем

$$\bar{y}\in M_k\subset M,\quad f_j(\bar{y})\leqslant 0,\quad j\in \mathrm{N}_m,\quad f_0(\bar{y})\leqslant\omega,$$

что противоречит как условию $v=+\infty$, так и выбору $\omega<v$. Следовательно, сделанное предположение неверно, а система (25.1) финитно-определена. Лемма доказана.

Отметим, что в лемме случай $v=+\infty$ не исключается.

Для $u^{k\omega}$, выбранного согласно лемме (25.1), положим

$$M(u^{k\omega})=\{x\in M_k\colon\ f(x)\in F(u^{k\omega})\}.$$

Следствие 25.1. *Пусть* $v>\omega>\inf\limits_{M_k} f_0(x)$. *Тогда, начиная с некоторого* k_0, *для любого* $X\subset M(u^{k\omega})$ *вектор* $\bar{u}=[\bar{u}_1,\ \ldots,\ \bar{u}_m]$, *где* $\bar{u}_j=u_j^{k\omega}\left(u_{m+1}^{k\omega}\right)^{-1}$, $j\in\mathrm{N}_m$, *принадлежит множеству решений системы линейных неравенств*

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\,u_j+f_0(x)\leqslant\omega,\qquad x\in X,$$

$$-u_j\leqslant 0,\qquad j\in\mathrm{N}_m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\,u_j+f_0(x)\geqslant\omega,\qquad x\in M_k.$$

Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из леммы 25.1.

Следствие 25.2. *Множество* $M(u^{k\omega})$ *непустое и выпуклое (начиная с некоторого* k_ω*).*

Непустота непосредственно следует из леммы 25.1. Покажем выпуклость $M(u^{k\omega})$. Пусть $x_i\in M(u^{k\omega})$ $(i=1,2)$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$. В силу выпуклости $f_i(x)$ справедливо

$$\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)\geqslant f(\alpha x_1+\beta x_2).$$

Отсюда в силу $u^{k\omega}\geqslant 0$ и $f(x_i)\in F(u^{k\omega})$ $(i=1,\ 2)$ получаем $(f(\alpha x_1+\beta x_2),\ u^{k\omega})\leqslant 0$.

С другой стороны, $u^{k\omega}$ — решение системы (25.1) и $\alpha x_1+\beta x_2\in M_k$, а потому $(f(\alpha x_1+\beta x_2),\ u^{k\omega})\geqslant 0$, что вместе с предыдущим неравенством означает справедливость включения $f(\alpha x_1+\beta x_2)\in F(u^{k\omega})$, следовательно, $\alpha x_1+\beta x_2\in M(u^{k\omega})$.

Следствие 25.3. *Пусть для задачи ВП* (24.9) *выполнено условие Слейтера в точке* $p \in M$ (*т. е.* $f_j(p) < 0$ $(j = 1, \ldots, m)$). *Тогда* $v(M, \mathbf{R}_+^m) = v^*(M, \mathbf{R}_+^m)$. *При этом, если* $v(M, \mathbf{R}_+^m) > -\infty$, *то существует вектор* $u^0 = [u_1^0, \ldots$ $\ldots, u_m^0] \in \mathbf{R}_+^m$ *такой, что базисный вектор* $[\bar{\alpha}_u] \times \bar{t}$, *где* $\bar{\alpha}_u = 1$ *при* $u = u^0$ *и* $\bar{\alpha}_u = 0$ *при* $u \neq u^0$ *и* $\bar{t} = v^*(M, \mathbf{R}_+^m)$, *является оптимальным для задачи* $L^*\left(\Phi_{M \times \mathbf{R}_+^m}\right)$.

Доказательство. Если $v(M, \mathbf{R}_+^m) = -\infty$, то, очевидно, $v^*(M, \mathbf{R}_+^m) = -\infty$. Если $v(M, \mathbf{R}_+^m) = v(M, \{0\}) >$ $> -\infty$, то нетрудно проверить, что можно взять $u^0 =$ $= 0 \in \mathbf{R}_+^m$. Пусть $v(M, \mathbf{R}_+^m) > v(M\{0\})$. Выберем ω^k, удовлетворяющее условию $v(M, \mathbf{R}_+^m) > \omega^k > v(M, \{0\})$. Тогда согласно следствию 25.1 и правилу выбора существуют $\bar{u}_j^k \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, начиная с некоторого $\bar{k}$, для которых имеют место неравенства

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\bar{u}_j^k + f_0(x) \geqslant \omega^k \quad \forall x \in M_k.$$

Можно считать $p \in M_k$, $k > \bar{k}$, тогда из выписанного неравенства при $x = p$ легко следует, что $\sup\limits_{j,k}\{u^k\} < +\infty$ и потому $\{\bar{u}^k = [\bar{u}_1^k, \ldots, \bar{u}_m^k]\}' \neq \varnothing$. Пусть $u^0 \in \{\bar{u}^k\}'$. Нетрудно проверить, что $u^0 \geqslant 0$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \omega^k \leqslant f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} f_j(x)\, u_j^0$ $\forall x \in M$. Из последних неравенств вытекает, что $\tilde{v}^*(M, \mathbf{R}_+^m) \geqslant \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \omega^k$ (см. (24.12)). А так как $\tilde{v}^*(M, \mathbf{R}_+^m) =$ $= v^*(M, \mathbf{R}_+^m)$, то и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \omega^k \leqslant v^*(M, \mathbf{R}_+^m)$. В силу произвольности выбора $\omega^k < v(M, \mathbf{R}_+^m)$ заключаем, что $v(M, \mathbf{R}_+^m) =$ $= v^*(M, \mathbf{R}_+^m)$.

Следствие 25.4. *В условиях леммы* 25.1 *имеет место неравенство* $v^*(M_k, \mathbf{R}_+^m) \geqslant \omega$ (*начиная с некоторого* k_ω).

Это утверждение непосредственно следует из неравенства, фигурирующего в доказательстве следствия 25.3.

Следствие 25.3 является переформулировкой для задач $L\left(\Phi_{M \times \mathbf{R}_+^m}\right)$ и $L^*\left(\Phi_{M \times \mathbf{R}_+^m}\right)$ теоремы Куна — Таккера.

Теорема 25.1. *Пусть* $v(M, \mathbf{R}_+^m) > v(M, \{0\})$ *для задачи ВП* (24.9) (*в частности, полусобственной*). *Тогда, ес-*

ли $v(M, \mathbf{R}^m_+) > \omega > v(M, \{0\})$, *то начиная с некоторого* k_ω, *для любого выпуклого* $X \subset M(u^{k\omega})$ *разрешима финитно-смешанная задача* $L(\Phi_{M_k \times U(X)})$ *со значением* ω *на некотором базисном векторе; здесь* $U(X)$ — *множество решений системы линейных неравенств над* $\mathbf{R}^m$ *вида*

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x) u_j + f_0(x) \leqslant \omega, \quad x \in X, \quad u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Выбор k_ω и $u^{k\omega}$ осуществим согласно лемме 25.1. Возьмем произвольно $\bar{x} \in X$ и положим $\bar{\lambda}_x = 1$ при $x = \bar{x}$, $\bar{\lambda}_x = 0$ при $x \neq \bar{x}$. Тогда для любого $u \in U(X)$ имеет место неравенство

$$\sum_{x \in M_k(\bar{\lambda})} \Phi(x, u) \bar{\lambda}_x = \sum_{j=1}^{m} f_j(\bar{x}) u_j + f_0(\bar{x}) \leqslant \omega,$$

т. е. вектор $[\bar{\lambda}_x] \times \omega$ является базисным в задаче $L(\Phi_{M_k \times U(X)})$. Предположим, что для последней задачи нашелся допустимый вектор $[\lambda_x] \times t$, для которого $t < \omega$. Тогда согласно лемме 25.2 можно считать вектор $[\lambda_x] \times t$ базисным, т. е. $\lambda_{x'} = 1, \lambda_x = 0$ $(x \neq x')$ при некотором $x' \in M_k$. Отсюда в силу следствия 25.1 будем иметь для $\bar{u} \in U(X)$ соотношения

$$\sum_{x \in M_k(\lambda)} \Phi(x', \bar{u}) \lambda_x = \sum_{j=1}^{m} f_j(x') \bar{u}_j + f_0(x') \geqslant \omega > t,$$

что противоречит допустимости $[\lambda_x] \times \omega$ в задаче $L(\Phi_{M_k \times U(X)})$. Поэтому $[\bar{\lambda}_x] \times \omega$ является оптимальным базисным вектором и $v(M_k, U(X)) = \omega$. Теорема доказана.

Теорема 25.2 (*аппроксимации интервала разрыва в двойственности полусобственной задачи ВП*). *Пусть* $v > \omega > v^*$. *Тогда, начиная с некоторого* k_ω, *для любого* $X \subset M(u^{k\omega})$ *разрешима с одним и тем же значением* ω *пара двойственных задач* $L(\Phi_{M_k \times U(X)})$ и $L^*(\Phi_{M_k \times U(X)})$.

Доказательство. Фактически достаточно доказать утверждение относительно задачи $L^*(\Phi_{M_k \times U(X)}$ (см. теорему 25.1). Пусть $u^0 = [u^0_1, \ldots, u^0_m]$ — некоторое решение системы из следствия 25.1. Тогда $u^0 \in U(X)$. Положим $\tilde{\alpha}_u = 1$ при $u = u^0$, $\tilde{\alpha}_u = 0$ при $u \neq u^0$ для всех

$u \in U(X)$. Тогда в силу выбора u^0 имеет место соотношение

$$\sum_{u \in U(X)(\bar{\alpha})} \bar{\alpha}_u f_{xu} = \sum_{j=1}^{m} f_j(x)\, u_j^0 + f_0(x) \geqslant \omega, \qquad x \in M_k,$$

что означает допустимость вектора $[\bar{\alpha}_u] \times \omega$ в задаче $L^*(\Phi_{M_k \times U(X)})$. Покажем его оптимальность. Предположим противное, т. е. что для некоторого допустимого вектора $[\alpha_u] \times t$ имеет место $\omega < t$. Так как, очевидно, множество $U(X)$ выпуклое и, как следует из доказанного выше, справедливо $-\infty < v^*(M_k,\ U(X))$, то в силу леммы 25.1 можно считать вектор $[\alpha_u] \times t$ базисным, т. е. $\alpha_u = 1$ при $u = \tilde{u}$, $\alpha_u = 0$ при $u \neq \tilde{u}$, где $\tilde{u} \in U(X)$. Тогда получаем неравенства

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x)\, \tilde{u}_j + f_0(x) = \sum_{u \in U(X)(\alpha)} \alpha_u f_{xu} \geqslant t > \omega, \qquad x \in M_k,$$

которые противоречат включению $\tilde{u} \in U(X)$ (так как по определению множества $U(X)$ для $\tilde{x} \in X \subset M_k$ имеет место $\sum_{j=1}^{m} f_j(\tilde{x})\, \tilde{u}_j + f_0(\tilde{x}) \leqslant \omega$). Следовательно, сделанное выше предположение неверно, а тогда $[\tilde{\alpha}_u] \times \omega$ — оптимальный базисный вектор. Теорема доказана.

Для (24.9) и (24.9)* положим

$$v = \inf_{M} \sup_{\mathbf{R}^m_+} \Phi(x, u); \quad v^* = \sup_{\mathbf{R}^m_+} \inf_{M} \Phi(x, u).$$

Следствие 25.5. *Пусть $v > v^*$ (в частности, когда (24.9) — полусобственная). Тогда для любого $\omega \in (v^*;\ v)$ существуют k_0 и для $k > k_0$ вектор $x^k \in M_k$ такие, что множество решений U_k системы линейных неравенств*

$$f_0(x^k) + \sum_{j=1}^{m} f_j(x^k)\, u_j \leqslant \omega, \quad u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

непустое, и имеют место равенства

$$\min_{M_k} \max_{U_k} \Phi(x, u) = \omega = \max_{U_k} \min_{M_k} \Phi(x, u).$$

Это следствие непосредственно следует из теоремы 25.2 в силу того, что из условия $\omega > v^*$ легко получаем $\omega > v^* \geqslant v^*(M,\ \{0\})$, при этом x^k выбирается произвольно из $M(u^{k\omega})$. Заметим, что случаи $v = +\infty$, $v^* = -\infty$ не исключаются.

Отметим, что если в теоремах 25.1, 25.2 выполнено условие $X_1 \subset X_2 \subset M(u^{k\omega})$, то $U(X_2) \subset U(X_1)$. При этом множество $X \subset M(u^{k\omega})$ можно выбирать и конечным. Отметим также, что если $\tilde{x}_k$ решает задачу $\inf\{f_0(x)\colon f_j(x) \leqslant \leqslant 0,\ j = 1, \ldots, m,\ x \in M_k\}$, то в общем случае не следует, что это $\tilde{x}_k$ может фигурировать в следствии 25.5. На выбор множеств M_k и $U(X)$ в задачах $L\left(\Phi_{M_k \times U(X)}\right)$ и $L^*\left(\Phi_{M_k \times U(X)}\right)$ можно смотреть как на согласованный выбор множеств строк и столбцов в подзадачах. Это согласуется с теоремами 24.2, 24.4 для задач ЛП над $\mathbf{R}'_\infty$.

25.2. Замыкающие задачи для полусобственных задач ВП. Для задачи ВП (24.9) определим множество

$$F_\omega = \{f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x), f_0(x) - \omega],\ x \in M\}.$$

Очевидно, для задачи (24.9) имеют место соотношения

$$v^*\left(M, \mathbf{R}_+^m\right) \geqslant v^*\left(M, \{0\}\right) = v\left(M, \{0\}\right).$$

Лемма 25.2. *Пусть* $+\infty > v^*\left(M, \mathbf{R}_+^m\right) \geqslant \omega > v^*(M, \{0\})$. *Тогда система линейных неравенств над* $\mathbf{R}^{m+1}$ *вида*

$$\begin{gathered} (e_i, u) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m+1, \\ (f(x), u) \geqslant 0 \quad (f(x) \in F_\omega) \end{gathered} \tag{25.4}$$

имеет такое решение $u^\omega = \left[u_1^\omega, \ldots, u_{m+1}^\omega\right]$, *для которого* $u_{m+1}^\omega > 0$ и $F\left(u^\omega\right) = \{f \in \overline{\operatorname{cone} F_\omega}\colon f \neq 0, \left(u^\omega, f\right) = 0\} \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что неравенство $u_{m+1} \leqslant 0$ является следствием системы (25.4). Тогда согласно обобщенной лемме Фаркаша (см. лемму 7.4 из [89]) при некоторых $\alpha_i^k \geqslant 0, \gamma_i^k \geqslant 0, \gamma^k \geqslant 0, x_i^k \in M$ имеет место равенство:

$$-e_{m+1} = \lim_{k \to \infty}\left\{\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i e_i + \gamma^k \sum_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k f\left(x_i^k\right)\right\};$$

здесь $\sum\limits_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k = 1$. А тогда для $x^k = \sum\limits_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k x_i^k$ в силу выпуклости функций $f_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ будем иметь:

$$-e_{m+1} = \lim_{k \to \infty}\left\{\sum_{i=1}^{m+2} \alpha_i^k e_i + \gamma^k f\left(x^k\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma^k\left[\sum_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k f\left(x_i^k\right) - f\left(x^k\right)\right]\right\}.$$

Отсюда заключаем, что справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\overline{\lim_{k\to\infty}}\{\gamma^k f_j(x^k)\}\leqslant 0, \quad j=1,\ldots,m,\\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\{\gamma^k[f_0(x^k)-\omega]\}\leqslant -1.\end{gathered} \tag{25.5}$$

Можно выбрать подпоследовательность $\{k_t\}\subset\{k\}$, для которой в (25.5) операции $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}$ можно заменить на $\lim\limits_{t\to\infty}$. Считая такую замену в (25.5) выполненной, предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty} f_j(x^{k_t})\leqslant 0$ $(j=1,\ldots,m)$. Тогда, как известно, будем иметь неравенства $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}} f_0(x^{k_t})\geqslant v^*\geqslant\omega$, что в силу (25.5) приводит к противоречию: $0\leqslant\lim\limits_{t\to\infty}\gamma^{k_t}[f_0(x^{k_t})-\omega]\leqslant -1$. Следовательно, для некоторого j' имеет место неравенство $\lim\limits_{t\to\infty} f_{j'}(x^{k_t})>0$ и потому из (25.5) следует, что $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\gamma^{k_t}=\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\gamma^{k_t}=0$. Поэтому можно считать $0\leqslant\gamma^{k_t}\leqslant 1$. Так как по условию выполнено неравенство $+\infty>v^*$, то можно выбрать $\{y^t\}\subset M$ так, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} f_j(y^t)\leqslant 0$ $(j=1,\ldots,m)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f_0(y^t)=v^*$. Положим $z^t=\gamma^{k_t}x^{k_t}+(1-\gamma^{k_t})y^t\in M$. Тогда получим неравенства

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} f_j(z^t)\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\{\gamma^{k_t}f_j(x^{k_t})+(1-\gamma^{k_t})f_j(y^t)\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \gamma^{k_t}f_j\ (x^{k_t})+\lim_{t\to\infty}(1-\gamma^{k_t})f_j(y^t)\leqslant 0,\ j=1,\ldots,m,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} f_0(z^t)\leqslant\lim_{t\to\infty}\{\gamma^{k_t}f_0(x^{k_t})+(1-\gamma^{k_t})f_0(y^t)\}+\lim_{t\to\infty}\gamma^{k_t}\omega=$$

$$=\overline{\lim_{t\to\infty}}\{\gamma^{k_t}f_0(x^{k_t})+\gamma^{k_t}\omega\}+\overline{\lim_{t\to\infty}}\{(1-\gamma^{k_t})f_0(y^t)\}\leqslant -1+v^*.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} f_j(z^t)\leqslant 0,\quad j=1,\ldots,m,\ \overline{\lim_{t\to\infty}} f_0(z^t)\leqslant v^*-1,$$

что в силу обобщенной теоремы двойственности (см. лемму 20.1 из [36]) противоречит определению v^* и условию $v^*<+\infty$. Следовательно, предположение о неравенстве-следствии $u_{m+1} \leqslant 0$ неверно, и потому существует решение $u^0 = [u_1^0, \ldots, u_{m+1}^0]$ системы (25.4), для которого $u_{m+1}^0 > 0$. Поскольку $v(M, \{0\}) < \omega$, то существует $y \in M$, для которого $f_0(y) < \omega$. Тогда при некотором $\bar{t} > 0$ для $u(t) = u^0 + te_{m+1}$ будет выполняться неравенство $(f(y), u(\bar{t})) < 0$. Отсюда заключаем, что для некоторого t^0 векторы $u(t)$ являются решением для системы (25.4) при $t < t^0$ и не являются таковыми при $t > t^0$. Пусть $\{t_s > t^0\} \to t_0$. Тогда, так как $(e_i, u(t)) \geqslant 0 \, \forall t > 0$, $i \in \mathbf{N}_{m+1}$, то для каждого t_s найдется $y_s \in M$ такой, что $(f(y_s), u(t_s)) < 0$. Пусть $\bar{f} \in \{\|f(y_s)\|^{-1} f(y_s)\}'$. Тогда из полученного выше неравенства следует, что $0 \geqslant (\bar{f}, u(t_0))$. С другой стороны, так как, очевидно, справедливо включение $\bar{f} \in \overline{\operatorname{cone}} F_\omega$, то $(\bar{f}, u(t^0)) \geqslant 0$. Следовательно, $(\bar{f}, u(t^0)) = 0$, при этом $\bar{f} \neq 0$, $u_{m+1}(t^0) = u_{m+1}^0 + t^0 > 0$. Поэтому вектор $u^\omega = u^0 + t^0 e_{m+1}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Следствие 25.6. *В условиях и обозначениях леммы* 25.2 *вектор* $\bar{u} = [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m]$, *где* $\bar{u}_j = (u_{m+1}^\omega)^{-1} u_j^\omega$, *является решением системы линейных неравенств*

$$\sum_{j=1}^m f_j u_j + f_{m+1} \leqslant \omega \quad ([f_1, \ldots, f_{m+1}] \in F(u^\omega)), \; u_j \geqslant 0,$$

$$j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^m f_j(x) u_j + f_0(x) \geqslant \omega, \; x \in M.$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 25.2.

Следствие 25.7. *В условиях и обозначениях леммы* 25.2 *множество* $F(u^\omega)$ — *выпуклое, замкнутое, причем, если* $f \in F(u^\omega)$ *и* $\bar{f} \in \overline{\operatorname{cone}} F_\omega$, $\bar{f} \leqslant f$, *то* $\bar{f} \in F(u^\omega)$.

Свойство выпуклости и замкнутости $F(u^\omega)$ следует непосредственно из определения. Пусть $\bar{f} \leqslant f$. Тогда из $u^\omega \geqslant 0$ следует $(\bar{f}, u^\omega) \leqslant (f, u^\omega) = 0$. С другой стороны, из леммы 25.2 получаем $(\bar{f}, u^\omega) \geqslant 0$ (так как u^ω — решение системы (25.4)). Следовательно, $(\bar{f}, u^\omega) = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 25.3. *Пусть* $+\infty > v^*(M, \mathbf{R}_+^m) > \omega$, $f \in \overline{\operatorname{cone}} F_\omega$. *Тогда в соотношении*

$$f = \lim_{k \to \infty} \left\{ \gamma^k \sum_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k f(x_i^k) \right\}, \qquad (25.6)$$

где $f(x_i^k) \in F_\omega$, $\gamma_i^k \geqslant 0$, $\gamma^k \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k = 1$, $i \in \mathrm{N}_{m+2}$, *выполняется равенство* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \gamma^k = \gamma < +\infty$.

Доказательство. Положим $x^k = \sum\limits_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k x_i^k$. Тогда из (25.6) в случае $\gamma = +\infty$ будет следовать (в силу выпуклости функций $f_i(x)$)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f_j(x^k) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} f_0(x^k) \leqslant \omega.$$

Отсюда в силу леммы обобщенной двойственности (см. [36, с. 100]) получаем противоречие с условием выбора $\omega < v^*(M, \mathrm{R}_+^m)$. Следовательно, $\gamma < +\infty$, что и требовалось доказать.

Пусть $f \in \overline{\mathrm{cone}}\, F(u^\omega)$. Тогда согласно лемме 25.3 с помощью равенства (25.6) для f определим значение $\Phi(f, u)$ по формуле

$$\Phi(f, u) = \lim_{k\to\infty} \left\{ \gamma^k \sum_{i=1}^{m+2} f_0(x_i^k) \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{m} u_j \lim_{k\to\infty} \left\{ \gamma^k \sum_{i=1}^{m+2} \gamma_i^k f_j(x_i^k) \right\}.$$

Определим по аналогии с п. 24.3 матрицу $\Phi_{\widetilde{M}\times U} = [f_{zu}]$, где $\widetilde{M} = M \cup \{f\}$, $U \subset \mathrm{R}_+^m$, $f_{zu} = \Phi(z, u)$, $z \in \widetilde{M}$, $u \in U$, для которой по правилу редукции (п. 24.3) рассмотрим финитно-смешанную задачу $L(\Phi_{\widetilde{M}\times U})$. Последнюю назовем *$f$-замыкающей задачей* для $L(\Phi_{M\times U})$.

Теорема 25.3. *Пусть* $+\infty > v^* > \omega > v^*(M, \{0\})$. *Тогда для* $f \in F(u^\omega)$ *и* γ, *выбранного согласно* (25.6), *множество решений* $U(\omega, \gamma)$ *системы линейных неравенств*

$$\sum_{j=1}^{m} f_j u_j + \gamma \lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{m+2} f_0(x_i^k) \gamma_i^k \right\} \leqslant \gamma\omega, \quad u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

непусто, а f-замыкающая задача $L(\Phi_{\widetilde{M}\times U(\omega,\gamma)})$ *разрешима со значением* $\gamma\omega$ *на некотором базисном векторе.*

Доказательство. Возьмем вектор $[\bar{\lambda}_z] \times \gamma\omega$, где $\bar{\lambda}_z = 1$ при $z = f$, $\bar{\lambda}_z = 0$ при $z \neq f$, $z \in \widetilde{M}$. Выбранный так вектор, очевидно, допустим для $L(\Phi_{\widetilde{M}\times U(\omega,\gamma)})$, поскольку для $u \in U(\omega, \gamma)$ выполняются соотношения вида

$$\sum_{z \in \widetilde{M}(\bar{\lambda})} \bar{\lambda}_z f_{zu} = \sum_{j=1}^{m} f_j u_j + f_0 \gamma \leqslant \gamma\omega;$$

здесь $\widetilde{M} = M \cup \{f\}$. Предположим, что для некоторого допустимого вектора $[\lambda'_z] \times t$ имеет место $t < \gamma\omega$. Обозначим

$$\widetilde{M}(\lambda') = \{f, x_1, \ldots, x_s\} = \{z \in \widetilde{M}: \quad \lambda'_z \neq 0\} \cup \{f\}.$$

Возьмем $\bar{u}$, удовлетворяющее условиям следствия 25.6. Очевидно, что $\bar{u} \in U(\omega, \gamma)$. Поскольку в силу леммы 25.2 и следствия 25.6 имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x_i^k)\bar{u}_j + f_0(x_i^k) \geqslant \omega, \qquad i = 1, \ldots, m+2,$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_j \bar{u}_j + f_0 \gamma = \gamma\omega,$$

то для $\bar{u}$ получаем неравенства

$$\sum_{z \in \widetilde{M}(\bar{\lambda})} \lambda'_z f_{z\bar{u}} = \left[\sum_{j=1} f_j \bar{u}_j + f_0 \gamma\right] \lambda'_f + \sum_{i=1}^{s} \lambda'_{x_i} \left[\sum_{j=1}^{m} f_j \bar{u}_j + f_0 \gamma\right] \geqslant$$
$$\geqslant \gamma\omega > t,$$

что противоречит допустимости вектора $[\lambda'_z] \times t$. Следовательно, предположение $t < \gamma\omega$ неверно и теорема доказана.

Отметим, что если теорема 25.2 характеризует аппроксимацию значений из интервала $(v^*; v)$ с помощью подзадач, то теорема 25.3 характеризует аппроксимацию значений $\omega < v^*$ путем пополнения задачи $L(\Phi_{M \times U(\omega, \gamma)})$ столбцом $f = [f_{fu}] \in \mathbf{R}_{U(\omega, \gamma)}$.

25.3. Внутренние и внешние многогранники Лагранжа в аппроксимации задач ВП. В двойственной задаче (24.9)* (при $X = M$, $U = \mathbf{R}_+^m$) выбор $\mathbf{R}_+^m = \{u \in \mathbf{R}^m: u_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, m\}$ — многогранника множителей Лагранжа — с одной стороны универсален и не зависит от конкретного задания выпуклых функций $f_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, с другой стороны допускает существование полусобственных задач ВП. Здесь для задач ВП более общего вида, чем (24.9), рассматриваются специальные многогранники Лагранжа (внутренние и внешние), для которых двойственность (по типу (24.9)—(24.9)*) носит безразрывный характер. При этом через внутренние многогранники характеризуется аппроксимация значения задачи ВП снизу, а через внешние — сверху.

Рассмотрим задачу ВП над $\mathbf{R}^{n+s}$ вида

$$\inf\left\{f_0(x)\colon\ f(x)\leqslant-\sum_{j=1}^{s}u_je_j,\ u_j\geqslant 0,\ \ x\in M,\ j=1,\ldots,l\right\};\tag{25.7}$$

здесь $f(x)=[f_1(x),\ \ldots,\ f_m(x)]\in\mathbf{R}^m$, $l\leqslant s$. Считаем, что значение этой задачи $v=+\infty$, если ограничения в (25.7) несовместны.

Положим $v_0=\inf\{f_0(x)\colon\ x\in M\}$,

$$\omega(x)=[f_1(x),\ldots,f_m(x),\ f_0(x)-\omega]\in\mathbf{R}^{m+1},$$

$$e_j^0=[e_j,0]\in\mathbf{R}^{m+1},\quad j\in\mathbf{N}_s,\quad e_{s+1}^0=[0,\ldots,0,1]\in\mathbf{R}^{m+1},$$

$$A^t=\{\mathbf{N}_{s+1}\diagdown\mathbf{N}_t\}\cup M,\quad t=l+1,\ldots,s+1.$$

Рассмотрим систему линейных неравенств над $\mathbf{R}^{m+1}$:

$$\begin{gathered}(e_j^0,u)\geqslant 0,\quad j=1,\ldots,\quad s+1,\ (\omega(x),u)\geqslant 0,\quad x\in M,\\ (-e_j^0,u)\geqslant 0,\quad j=k+1,\ldots,t,\end{gathered}\tag{25.8}$$

где $k\geqslant l$. Ниже условие $k=s$ будет означать, что отсутствуют ограничения $-(e_j^0,u)\geqslant 0$.

Пусть E — некоторое подпространство из $\mathbf{R}^q$. Совместную систему линейных неравенств над $\mathbf{R}^q$

$$(a_\alpha,\ u)\geqslant b_\alpha,\quad \alpha\in A$$

назовем финитно E-определенной по $B\subset A$ (см. [36, с. 59]), если всякое неравенство-следствие $(c,\ u)\geqslant d$ выписанной системы при $c\in E$ является таковым и для некоторой (своей) конечной подсистемы

$$(a_{\alpha_i},u)\geqslant b_{\alpha_i},\quad \alpha_i\in B,\quad i=1,\ldots,p,\quad (a,u)\geqslant b,$$

где неравенство $(a,\ u)\geqslant b$ является следствием подсистемы

$$(a_\alpha,\ u)\geqslant b_\alpha,\quad \alpha\in A\backslash B.$$

Положим $E_{m+1}=\{x=[0,\ \ldots,\ 0,\ x_{m+1}]\in\mathbf{R}^{m+1}\}$.

Лемма 25.4. *Пусть для задачи* (25.7) *имеет место* $v>-\infty$ *и система* (25.8) *при некотором* t *финитно* E_{m+1}-*определена по* A^t, *причем либо* $t\leqslant s$, *либо* $k=s$. *Тогда при любом значении* $\omega<v$ *система линейных неравенств*

над $\mathbf{R}^m$ *вида*

$$(e_j,\ z)\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ s,\quad (-e_j,\ z)\geqslant 0,\quad j=k+1,\ \ldots,\ t,$$
$$(f(x),\ z)+f_0(x)\geqslant \omega,\qquad x\in M, \tag{25.9}$$

совместна.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, как известно (см. [36, с. 79]), неравенство $u^{m+1}\leqslant 0$ является следствием системы над $\mathbf{R}^{m+1}$ вида

$$(e_j^0, u)\geqslant 0,\quad j=1,\ldots,s,\quad (-e_j^0, u)\geqslant 0,\ j=k+1,\ldots,t,$$
$$(\omega(x), u)\geqslant 0,\quad x\in M,\quad (e_{s+1}^0, u)\geqslant 0.$$

Выписанная система в силу условий леммы для t, очевидно, совпадает с системой (25.8) при выбранном t. А потому в силу финитной E_{m+1}-определенности по A^t неравенство $u_{m+1}\leqslant 0$ является следствием некоторой конечной подсистемы

$$(e_j^0, u)\geqslant 0,\ j=1,\ldots,s+1,\ (-e_j^0, u)\geqslant 0,\ j=k+1,\ldots,t,$$
$$(\omega(x_i), u)\geqslant 0,\qquad i=1,\ldots,\eta,$$

при некоторых $x_i\in M$ и η. Отсюда согласно лемме Фаркаша имеет место векторное равенство

$$-e_{s+1}^0=\sum_{j=1}^{s}\gamma_j e_j^0+\gamma e_{s+1}^0+\sum_{i=1}^{\eta}\beta_i\omega(x_i), \tag{25.10}$$

где $\gamma_i\geqslant 0$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$, $\gamma\geqslant 0$, $\beta_i\geqslant 0$ $(i=1,\ \ldots,\ \eta)$. Поскольку $\gamma\geqslant 0$, то из (25.10) вытекает, что $\beta=\sum_{i=1}^{\eta}\beta_i>0$. А тогда для $y=\sum_{i=1}^{\eta}\beta^{-1}\beta_i x_i$ в силу выпуклости функций $f_i(x)$ из (25.10) следуют неравенства

$$f(y)\leqslant\sum_{i=1}^{\eta}\beta^{-1}\beta_i f(x_i)=\sum_{j=1}^{s}-\beta^{-1}\gamma_j e_j,$$
$$f_0(y)-\omega\leqslant\sum_{i=1}^{\eta}\beta^{-1}\beta_i(f_0(x_i)-\omega)\leqslant -1,$$

причем $\beta^{-1}\gamma_j\geqslant 0$ $(j=1,\ \ldots,\ k,\ y\in M)$. Полученные неравенства, очевидно, противоречат условию $\omega<v$. Следовательно, система (25.9) совместна. Лемма доказана.

Отметим очевидные свойства системы (25.8).

1. *Если система* (25.8) *финитно E_{m+1}-определена по A^t, то она является таковой и по A^h для $h \leqslant t$.*

2. *Если система* (25.8) *является финитно-определенной* (см. п. 24.1), *то для любого $t \in \mathrm{N}_{s+1} \backslash \mathrm{N}_l$ она является финитно E_{m+1}-определенной по A^t.*

Лемма 25.5. *Пусть в задаче* (25.7) *множество M является выпуклым компактом, $e_1 = 0$ и если $s > 1$, то $0 \notin \operatorname{co}\{e_2, \ldots, e_s\}$. Тогда для всякого $\omega < v$ при $k = s$ система* (25.8) *финитно-определена.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathrm{R}^{m+1}$ ($c \neq 0$) и неравенство $(c, u) \geqslant 0$ является следствием системы (25.8). Требуется показать, что оно является таковым и для некоторой конечной подсистемы из (25.8). В силу обобщенной леммы Фаркаша имеет место равенство

$$c = \lim_{k \to \infty} \left\{ \sum_{i=2}^{s} \gamma_i^k e_i^0 + \alpha^k e_{s+1}^0 + \sum_{j=1}^{m+2} \beta_j^k \omega\left(y_j^k\right) \right\} \qquad (25.11)$$

при некоторых $\gamma_i^k \geqslant 0$ ($i = 2, \ldots, s$), $\alpha^k \geqslant 0, \beta_i^k \geqslant 0$, $y_i^k \in M$, $i \in \mathrm{N}_{m+2}$. В силу компактности M и непрерывности выпуклых функций легко проверить, что существует подпоследовательность $\{k_t\} \subset \{k\}$, для которой справедливы соотношения

$$\lim_{t \to \infty} f_i\left(y_j^{k_t}\right) = f_i(y_j), \; y_j \in M, \; i = 0, 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, m+2. \qquad (25.12)$$

Положим $\gamma^{k_t} = \sum_{i=2}^{s} \gamma_i^{k_t}, \quad \beta^{k_t} = \sum_{i=1}^{m+2} \beta_i^{k_t}, a^{k_t} = \gamma^{k_t} + \beta^{k_t} + \alpha^{k_t}$.

Равенство (25.12) позволяет считать (без потери в общности), что имеют место соотношения

$$\lim_{t \to \infty} \left(a^{k_t}\right)^{-1} \gamma_i^{k_t} = \gamma_i, \quad i = 2, \ldots, s, \quad \lim_{t \to \infty} \left(a^{k_t}\right)^{-1} \alpha^{k_t} = \alpha,$$
$$\lim_{t \to \infty} \left(a^{k_t}\right)^{-1} \beta^{k_t} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m+2.$$

Предположим, что $\lim_{t \to \infty} a^{k_t} = +\infty$. Тогда, так как $\lim_{t \to \infty} \left(a^{k_t}\right)^{-1} c = 0$, то из (25.11) в силу (25.12) получаем равенство

$$0=\sum_{i=2}^{s}\gamma_i e_i^0+\alpha e_{s+1}^0+\sum_{i=1}^{m+2}\beta_i\omega(y_i). \qquad (25.13)$$

Обозначим $\gamma=\sum_{i=2}^{s}\gamma_i$, $\beta=\sum_{i=1}^{m+2}\beta_i$. Очевидно, $\alpha+\beta+\gamma=1$ при $s>1$, а при $s=1$ имеем $\beta+\alpha=1$. Предположим $\beta=0$. Тогда в силу (25.13) получаем $\alpha=0$, что невозможно при $s=1$. Если же $s>1$, то приходим к равенству $\gamma=1$, что в силу (25.13) означает включение $0\in\operatorname{co}\{e_2,\ldots,e_s\}$, противоречащее условиям леммы. Следовательно, $\beta>0$ и потому для $y=\sum_{i=1}^{m+2}\beta^{-1}\beta_i y_i$ в силу выпуклости функций $f_i(x)$ и множества M из (25.13) получаем:

$$f(y)\leqslant-\sum_{i=2}^{s}\beta^{-1}\gamma_i e_i,\quad f_0(y)\leqslant\omega,$$

причем $\beta^{-1}\gamma_i\geqslant 0$ $(i=2,\ldots,s)$, что, очевидно, противоречит условию $\omega<v$. Следовательно, будем иметь

$$\varlimsup_{t\to\infty}a^{k_t}<+\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\alpha^{k_t}=\bar\alpha,\quad \lim_{t\to\infty}\beta_i^{k_t}=\bar\beta_i.$$

Отсюда и из (25.11) вытекает равенство

$$c=\sum_{i=2}^{s}\bar\gamma_i e_i^0+\bar\alpha e_{s+1}^0+\sum_{i=1}^{m+2}\bar\beta_i\,\omega(y_i),$$

где $\bar\gamma_i\geqslant 0$, $\bar\alpha\geqslant 0$, $\bar\beta_i\geqslant 0$, которое означает, очевидно, что неравенство $(c,u)\geqslant 0$ является следствием подсистемы

$$(e_i^0,u)\geqslant 0,\quad i=2,\ldots,s,\quad (e_{s+1}^0,u)\geqslant 0,$$
$$(\omega(y_i),u)\geqslant 0,\quad i=1,\ldots,m+2$$

из системы (25.8). Лемма доказана.

Отметим, что условия лемм 25.4, 25.5 не исключают случая $v=+\infty$.

Следствие 25.8. *Пусть выполнены условия леммы 25.5. Если при этом $v>\omega>v_0$, то существует решение z_0 системы (25.9) при $k=s$ такое, что*

$$M(z_0)=\{x\in M\colon (f(x),z_0)+f_0(x)\leqslant\omega\}\neq\varnothing.$$

Доказательство. Поскольку $\omega>v_0$, то найдется вектор $y\in M$, для которого $f_0(y)<\omega$, а потому $z=0\in\mathbf{R}^m$

не является решением системы (25.9) при $k=s$. Множество решений этой системы, которое согласно леммам 25.4, 25.5 не пусто, обозначим через Z. Возьмем $\tilde{z}\in Z$ и $t^0=\min\{t\colon\ t\tilde{z}\in Z\}$. Очевидно, что такое t^0 в условиях следствия существует. Пусть $\{0<t^k<t^0\}\to t^0$. Тогда $t^k\tilde{z}\notin Z$. Так как, очевидно, $(e_j,\ t^k\tilde{z})\geqslant 0$, $j\in\mathbf{N}_s$, то для каждого t^k найдется $x^k\in M$, для которого $\omega>f_0(x^k)+(f(x^k),\ t^k\tilde{z})$. А тогда в силу компактности M и выпуклости $f_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$ на $\mathbf{R}^n$ следует, что для некоторого $\tilde{x}\in\{x^k\}'\subset M$ имеет место

$$(f(\tilde{x}),\ t^0z)+f_0(\tilde{x})\leqslant\omega,\qquad t^0\tilde{z}\in Z.$$

Для завершения доказательства осталось положить $z_0=t^0\tilde{z}$.

Доказанное следствие говорит о том, что в системе (25.9) неравенство с индексом $\tilde{x}\in M$ является граничным. Для задачи (25.7) положим $M_1=\{\omega(x)\in\mathbf{R}^{m+1}: x\in M\}$, $M_2=\{-e_j^0 : j\in\mathbf{N}_{s+1}\}$.

Следствие 25.9. *Пусть в задаче* (25.7) *имеет место* $v>-\infty$. *Тогда, если* $\omega<v$, $\operatorname{co}M_1=\overline{\operatorname{co}}\,M_1$, $\overline{\operatorname{cone}M_1}\cap\overline{\operatorname{cone}M_2}=\{0\}$, *то система* (25.9) *при* $k=s$ *совместна.*

Действительно, из теоремы 14.1 [36] следует, что система (25.8) является финитно E_{m+1}-определенной по A^{s+1}, а тогда совместность системы (25.9) будет следовать из леммы (25.4).

Отметим, что условия следствия 25.9 выполнены, например, в случае $f_i(x)=(a_i,\ x)-b_i$, поскольку равенство $\operatorname{co}M_1=\overline{\operatorname{co}}\,M_1$ выполняется очевидным образом, а равенство $\overline{\operatorname{cone}M_1}\cap\overline{\operatorname{cone}M_2}=\{0\}$ легко следует из очевидного свойства замкнутости множества $\operatorname{cone}M_i$ и выбора $\omega<v$.

Согласно следствию 25.8 существует вектор $\tilde{x}\in M$ такой, что множество решений Γ_ω системы линейных неравенств

$$(f(\tilde{x}),\ z)+f_0(\tilde{x})\leqslant\omega,\quad (e_j,\ z)\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ s,\quad (25.14)$$

непусто. Если, например, $e_j=[\overbrace{0,\ldots,1}^{j},\ldots,0]$, $j\in\mathbf{N}_m$, $m=s$, то $\mathbf{R}_+^m=\{z\in\mathbf{R}^m : (e_j,z)\geqslant 0,\ \ j=1,\ldots,m\}$, и тогда, очевидно, справедливо включение $\Gamma_\omega\subset\mathbf{R}_+^m$. Множество Γ_ω из (25.14) назовем *ω-внутренним многогранником Лагранжа.*

Теорема 25.4. *Пусть в задаче* (25.7) $e_1=0$, *множество* M — *выпуклый компакт и* $0\notin\operatorname{co}\{e_2,\ \ldots,\ e_s\}$ *при*

$s>1$. *Тогда, если* $v>\omega>v_0$, *то для* ω *существует такой* ω*-внутренний многогранник Лагранжа, для которого имеют место соотношения*

$$\min_M \max_{\Gamma_\omega} \Phi(x, u) = \omega = \max_{\Gamma_\omega} \min_M \Phi(x, u).$$

Действительно, существование Γ_ω следует из следствия 25.8. А тогда в силу совместности системы (25.9) при $k=s$, как нетрудно видеть, следует $\omega = \min\limits_M \max\limits_{\Gamma_\omega} \Phi(x, u)$. Далее, поскольку система (25.14) выписывалась в соответствии со следствием 25.8, то найдется решение z_0, общее для (25.9) и (25.14), для которого будем иметь:

$$\omega = \Phi(\tilde{x}, z_0) = \min_M \Phi(x, z_0) \leqslant \sup_{\Gamma_\omega} \min_M \Phi(x, z) \leqslant$$
$$\leqslant \min_M \sup_{\Gamma_\omega} \Phi(x, z) = \omega.$$

Отсюда в силу $\inf\limits_M \Phi(x, z) = \min\limits_M \Phi(x, z)$ и следует требуемое.

Теорема 25.4 говорит о том, что каждое значение $\omega<v$ является значением некоторой минимаксной задачи для $\Phi(x, z)$ на $M\times\Gamma_\omega$, где Γ_ω выбирается в соответствии с (25.14).

Ниже рассматриваются внешние многогранники Лагранжа и значение v аппроксимируется сверху. Пусть $p\in M$, $e_1=0$, $\gamma_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, l$, $-e(\gamma, p) = f(p) + \sum\limits_{i=2}^{s} \gamma_i e_i \leqslant 0$. Рассмотрим задачу

$$\inf\Big\{f_0(x): u_j\geqslant 0, \quad j=0, 1, \ldots, l,$$
$$f(x) \leqslant -\sum_{i=2}^{s} u_i e_i - u_0 e(\gamma, p)\Big\},$$

и пусть $\tilde{v}(\gamma, p)$ — ее оптимальное значение.

Лемма 25.6. *Если* $e(\gamma, p)\geqslant 0$, *то* $v=\tilde{v}(\gamma, p)$.

Справедливость леммы проверяется непосредственно.

Конус $\Gamma(\gamma, p)$ решений конечной системы линейных неравенств вида

$$(e_i, u)\geqslant 0, \quad i=1, \ldots, s, \quad (e(\gamma, p), u)\geqslant 0$$

назовем (γ, p)*-внешним многогранником Лагранжа.* Так как $e(\gamma, p)\geqslant 0$, то $\mathbf{R}_+ \subset \Gamma(\gamma, p)$.

Для (25.7) рассмотрим задачу

$$\sup\{u_{m+1}:\ (f(x),\ u)+f_0(x)\geqslant u_{m+1},\ x\in M,\ u\in\Gamma(\gamma,\ p)\}. \tag{25.15}$$

Ее значение будем обозначать через $v^*(\gamma,\ p)$.

Теорема 25.5. *Пусть в задаче ВП (25.7) выполнены условия* $e_1=0$, $0\notin\mathrm{co}\{e_2,\ \ldots,\ e_s,\ e(\gamma,\ p)\}$ *и либо* $f_i(x)=(a_i,\ x)-b_i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$, *либо* M — *компакт. Тогда* $v\leqslant v^*(\gamma,\ p)\leqslant f_0(p)$.

Доказательство. В силу леммы 25.6 имеем $v=\tilde v(\gamma,\ p)$, а потому согласно замечанию к следствию 25.9 и леммам 25.4, 25.5 система ограничений в (25.15) совместна при $u_{m+1}=\omega$ для любого $\omega<v$. Следовательно, $v^*(\gamma,\ p)\geqslant v$. Пусть вектор $[\tilde u,\ \tilde u_{m+1}]\in\mathbf{R}^{m+1}$ допустим для (25.15). Тогда из (25.15) получаем

$$\tilde u_{m+1}\leqslant$$
$$\leqslant(f(p),\ \tilde u)+f_0(p)+\sum_{i=1}^{s}\gamma_i(e_i,\ \tilde u)+(e(\gamma,\ p),\ u)=f_0(p),$$

откуда и следует требуемое неравенство $f_0(p)\geqslant v^*(\gamma,\ p)$.

Обозначим через C допустимое множество задачи (25.7).

Следствие 25.10. *В условиях теоремы* 25.5 *имеет место*

$$\inf_{[\gamma,p]\in C} v^*(\gamma,\ p)=v.$$

Утверждение непосредственно вытекает из теоремы 25.5.

Рассмотрим случай задачи ВП (25.7), когда $s=1$, $e_1=0$ (т. е. задачу (24.9)). В этом случае для каждой допустимой точки p задачи (24.9) p-внешний многогранник Лагранжа имеет вид

$$\Gamma(p)=\{u\in\mathbf{R}^m:\ (e(p),\ u)\geqslant 0\}$$

и является полупространством. Отметим, что, если $u\in\mathbf{R}^m_+$, то, очевидно, $u\in\Gamma(p)$. Тогда задача (25.15) принимает вид

$$v^*(p)=\sup\Big\{u_{m+1}:\ -\sum_{j=1}^{m}f_j(p)\,u_j\geqslant 0,$$
$$f_0(x)+\sum_{j=1}^{m}f_j(x)\,u_j\geqslant u_{m+1},\quad x\in M\Big\},$$

совпадающий с видом двойственной задачи (24.9)*, если в последней заменить $\mathbf{R}_+^m$ на $\Gamma(p)$. Очевидно, справедлива

Теорема 25.6. *Пусть в задаче* (24.9) *либо* $f_i(x) = (a_i, x) - b_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, *либо* M — *компакт. Тогда* $v = \inf\limits_{p \in C} v^*(p)$.

Применим изложенное выше к задачам ЛП. Пусть имеется пара двойственных задач ЛП над $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$:

$$\min\{(a_0, x) : (a_j, x) \leqslant b_j, \quad j = 1, \ldots, m\},$$

$$\max\left\{(-b, u) : \sum_{j=1}^m u_j a_j = -a_0, \quad u_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m\right\}.$$

Пусть $p \in \mathbf{R}^n$ — допустимый вектор прямой задачи. Тогда соответствующий p-внешний многогранник Лагранжа $\Gamma(p)$ является полупространством, задаваемым неравенством $\sum\limits_{j=1}^m ((a_j, p) - b_j) u_j \leqslant 0$. Соответствующая задача (25.15) будет иметь вид

$$\max\left\{(-b, u) : \sum_{j=1}^m u_j a_j = -a_0, \ \sum_{j=1}^m [(a_j, p) - b_j] u_j \leqslant 0\right\}.$$

ГЛАВА VI

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящей главе будут исследованы некоторые численные процедуры аппроксимации несобственных задач выпуклого программирования, в частности, процедуры итеративной аппроксимации (итеративной коррекции по некоторому критерию качества).

§ 26. Аппроксимация несобственной задачи выпуклого программирования по целевой функции и правым частям ограничений

В данном параграфе задача аппроксимации задачи выпуклого программирования одновременно по целевой функции и правым частям ограничений вначале сводится к двум независимым задачам, а затем для первой из них разрабатываются методы приближенного решения.

26.1. Постановка задачи и необходимые определения. Пусть $f_1, \ldots, f_m, -f_0$ — выпуклые функции, определенные и конечные на $\mathbf{R}^n$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)] \in \mathbf{R}^m$. Задаче выпуклого программирования

$$C\colon \sup\{f_0(x)\colon f(x) \leqslant 0,\ x \in M \subset \mathbf{R}^n\},$$

где M — непустое выпуклое замкнутое множество (с учетом интерпретации несобственной задачи C для нас особый интерес представляет случай $M = \mathbf{R}^n_+$), поставим в соответствие задачу

$$C(\Delta c, \Delta b)\colon \sup\{f_0(x) - (\Delta c, x)\colon f(x) \leqslant \Delta b,\ x \in M\},$$

в которой $[\Delta c, \Delta b] \in \mathbf{R}^{n+m}$ — векторный параметр. В случае $M(\Delta b) = \{x \in M\colon f(x) \leqslant \Delta b\} = \varnothing$ положим $\operatorname{opt} C(\Delta c, \Delta b) = v(\Delta c, \Delta b) = -\infty$. Обозначив

$$K_c^1(\Delta b) = \{\Delta c : v(\Delta c, \Delta b) < +\infty\},\quad K_c^2(\Delta b) =$$
$$= \{\Delta c : \exists x \in M(\Delta b),\quad f_0(x) - (\Delta c, x) = v(\Delta c, \Delta b)\},$$

где $\Delta b \in K_b = \{\Delta b\colon\ M(\Delta b) \neq \varnothing\}$, определим множества

$$K^i = \bigcup_{\Delta b \in K_b} \left(K_c^i(\Delta b) \times \{\Delta b\}\right) \subset \mathbf{R}^{n+m}, \qquad i = 1, 2.$$

С помощью $F(\Delta c,\ \Delta b,\ x,\ u) = f_0(x) - (\Delta c,\ x) - (u, f(x) - \Delta b)$, $u \in \mathbf{R}^m$,— функции Лагранжа задачи $C(\Delta c,\ \Delta b)$ — запишем двойственную к $C(\Delta c,\ \Delta b)$ задачу, ее значение и допустимое множество соответственно в виде

$$C^*(\Delta c,\ \Delta b)\colon\ \inf_{u \geqslant 0} \sup_{x \in M} F(\Delta c,\ \Delta b,\ x,\ u),$$

$$v^*(\Delta c,\ \Delta b) = \operatorname{opt} C^*(\Delta c,\ \Delta b),$$

$$M^*(\Delta c,\ \Delta b) = \{u \geqslant 0\colon\ \sup_{x \in M} F(\Delta c,\ \Delta b,\ x,\ u) < +\infty\}.$$

Очевидно, $M^*(\Delta c,\ \Delta b^1) = M^*(\Delta c,\ \Delta b^2) = M^*(\Delta c)$ для любых Δc, Δb^1, Δb^2. Введем обозначения

$$K_c = \{\Delta c : M^*(\Delta c) \neq \varnothing\}, \quad K^3 = K_c \times K_b,$$

$$K^4 = \{[\Delta c,\ \Delta b] : v(\Delta c,\ \Delta b) = v^*(\Delta c,\ \Delta b) \neq \pm\infty\},$$

$$K\{[\Delta c,\ \Delta b] \in K^2 \cap K^4 :\ \exists u \geqslant 0,\quad v^*(\Delta c,\ \Delta b) = \sup_{x \in M} F(\Delta c,\ \Delta b,\ x,\ u)\}.$$

В соответствии с определением собственных задач ВП $K = \{[\Delta c,\ \Delta b]$: задача $C(\Delta c,\ \Delta b)$ — собственная$\}$.

Лемма 26.1. *Множество K непусто.*

Доказательство. Пусть

$$x^0 \in M,\quad w \in \mathbf{R}^m,\quad w > 0,\quad \Delta b = f(x^0) + w,\quad \Delta c \in -\partial(-f_0(x^0)).$$

Тогда из определения субдифференциала вытекает, что x^0 — решение задачи $C(\Delta c,\ \Delta b)$, и в точке x^0 достигается $\sup_{x \in M} F(\Delta c,\ \Delta b,\ x,\ 0)$. Так как, кроме того, $F(\Delta c, \Delta b, x^0, 0) \leqslant F(\Delta c,\ \Delta b,\ x^0,\ u)$ $\forall u \geqslant 0$, то $v^*(\Delta c,\ \Delta b) = \sup_{x \in M} F(\Delta c,\ \Delta b,\ x, 0)$. Следовательно, $[\Delta c,\ \Delta b] \in K$. Лемма доказана.

В том случае, когда C несобственная (т. е. $0 \notin K$), рассмотрим задачи

$$\inf\{d(\Delta c,\ \Delta b)\colon\ [\Delta c,\ \Delta b] \in K^i\}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{26.1}$$

Здесь $K^0 = K$, функция $d(\Delta c,\ \Delta b)$ является критерием для выбора значений $[\Delta c,\ \Delta b]$ или, другими словами, определяет качество аппроксимации несобственной задачи C задачами вида $C(\Delta c,\ \Delta b)$, в которых соответственно $[\Delta c,\ \Delta b] \in K^i$. В качестве $d(\Delta c,\ \Delta b)$ могут быть взяты, например, функции (при $s = n + m$)

$$d_0^s(z) = \max\{|z_i| : 1 \leqslant i \leqslant s\}, \quad d_1^s(z) = \sum_{i=1}^{s} |z_i|,$$

$$d_2^s(z) = \left(\sum_{i=1}^{s} z_i^2\right)^{1/2} = \|z\|, \qquad z = [z_1, \ldots, z_s] \in \mathbf{R}^s.$$

26.2. Структура множества K. Пусть $x^1 \in M(\Delta b^1)$, $x^2 \in M(\Delta b^2)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Тогда, очевидно,

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M(\lambda\Delta b^1 + (1-\lambda)\Delta b^2),$$

$$f_0(x) - (\lambda\Delta c^1 + (1-\lambda)\Delta c^2, x) \leqslant \lambda(f_0(x) - (\Delta c^1, x)) + \\ + (1-\lambda)(f_0(x) - (\Delta c^2, x)) \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n.$$

Отсюда с учетом леммы 26.1 вытекают свойства: а) множество K_b непусто и выпукло; б) $K_c^1(\Delta b)$ непусто и выпукло при любом $\Delta b \in K_b$. Обозначим $M_{pq} = \{x \geqslant p\colon f(x) \leqslant q\}$, где $p \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^m$.

Лемма 26.2. *Пусть* $M = \mathbf{R}_+^n$, $M_{pq} \neq \varnothing$, $s \in \mathbf{R}^n$, $\operatorname{int}\{-f_0(x) + (s, x) : x \in M_{pq}\} = \alpha > -\infty$. *Тогда* $[s, \Delta b] \in \overline{K}$ *при всех* $\Delta b \in K_b$. (Черта над множеством обозначает замыкание.)

Доказательство. Учитывая, что функция $-f_0(x) + (s, x) + (z, x)$ на множестве M_{pq} имеет миноранту $\alpha + (z, x)$, легко видеть, что для всех $z \in \mathbf{R}^n$, $z > 0$ множество решений задачи $\min\{-f_0(x) + (s + z, x)\colon x \in M_{pq}\}$ непусто и ограничено. Тогда, применяя вначале следствие 24.2, а затем теорему 21.1 из [36], имеем

$$s + z \in K_c^2(\Delta b + w), \quad [s + z, \Delta b + w] \in K \tag{26.2}$$

при всех $z > 0$, $w > 0$, $w \in \mathbf{R}^m$, $\Delta b \in K_b$, т. е. $[s, \Delta b] \in \overline{K}$.

Согласно [72, с. 83] любой выпуклой замкнутой функции $\tau(x)$, принимающей только конечные значения (такие функции называются собственными), можно поставить в соответствие функцию

$$\tau 0^+(x) = \\ = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\tau(x^1 + \lambda x) - \tau(x^1)}{\lambda} = \sup_{\lambda > 0} \frac{\tau(x^1 + \lambda x) - \tau(x^1)}{\lambda}, \tag{26.3}$$

где $x^1 \in \operatorname{dom} \tau$ (значение $\tau 0^+(x)$ не зависит от выбора $x^1 \in \operatorname{dom} \tau$). Функция $\tau 0^+(x)$ выпукла, замкнута, положительно однородна, $\tau 0^+(x) > -\infty$ для всех $x \in \mathbf{R}^n$ [72].

Пусть $G(\Delta b)$ и $G(p, q)$ — рецессивные конусы множеств $M(\Delta b)$ и M_{pq}. Тогда согласно [72, § 8] существуют G_M и G — непустые выпуклые замкнутые конусы, содержащие начало координат, для которых выполняется $G_M = G(\Delta b)$, $G = G(p, q)$ при любых Δb, p, q таких, что $M(\Delta b) = \varnothing$, $M_{pq} \neq \varnothing$. Обозначим

$$V_c(\Delta b) = \{\Delta c\colon v(\Delta c, \Delta b) \neq \pm\infty\},$$

$$V_b(\Delta c) = \{\Delta b\colon v^*(\Delta c, \Delta b) \neq \pm\infty\}.$$

Теорема 26.1. *Справедливы соотношения*

$$K \subset K^4 \subset K^3 \subset K^1, \quad K \subset K^2 \subset K^1; \tag{26.4}$$

$$\overline{K}^i = \overline{K} = \overline{K}_c \times \overline{K}_b, \quad i = 1, 2, 3, 4; \tag{26.5}$$

$$\overline{K}_c = \overline{V}_c(\Delta b), \quad \overline{K}_b = \overline{V}_b(\Delta c) \quad \forall \Delta b \in K_b, \quad \forall \Delta c \in K_c. \tag{26.6}$$

Если $M = \mathbf{R}^n_+$, *то*

$$[\Delta c + z, \Delta b + w] \in K \quad \forall [\Delta c, \Delta b] \in \overline{K}, \quad z > 0, \quad w > 0. \tag{26.7}$$

Доказательство. Справедливость (26.4) вытекает из определений множеств K^i и известного соотношения

$$v(\Delta c, \Delta b) = \sup_{x \in M} \inf_{u \geqslant 0} F(\Delta c, \Delta b, x, u) \leqslant v^*(\Delta c, \Delta b). \tag{26.8}$$

Введем функцию

$$f[u](x) = -f_0(x) + \delta(x | M(u)),$$

где

$$\delta(x \mid M(u)) = \begin{cases} 0, & x \in M(u), \\ +\infty, & x \notin M(u). \end{cases} \qquad u \in \mathbf{R}^m,$$

Положим $(f[\Delta b] + \Delta c)(x) = f[\Delta b](x) + (\Delta c, x)$. Учитывая [72, с. 94], имеем $(f[\Delta b] + \Delta c)0^+(x) = f[\Delta b]0^+(x) + (\Delta c, x)$. Тогда в силу определения множества G_M для произвольных Δc, $\Delta b \in K_b$, $x^1 \in M(\Delta b)$ выполняется

$$(f[\Delta b] + \Delta c)\, 0^+(x) = f[\Delta b]\, 0^+(x) + (\Delta c, x) =$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{f[\Delta b](x^1 + \lambda x) - f[\Delta b](x^1)}{\lambda} + (\Delta c, x) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & x \notin G_M, \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{-f_0(x^1 + \lambda x) + f_0(x^1)}{\lambda} + (\Delta c, x), & x \in G_M. \end{cases}$$

Так как $x^1 \in M(\Delta b + w)$ $\forall w > 0$, то аналогичным образом получаем

$$(f[\Delta b + w] + \Delta c)\,0^+(x) = \begin{cases} +\infty, & x \notin G_M, \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{-f_0(x^1 + \lambda x) + f_0(x^1)}{\lambda} + (\Delta c, x), & x \in G_M, \end{cases}$$

т. е. $(f[\Delta b] + \Delta c)0^+(x) = (f[\Delta b + w] + \Delta c)0^+(x)$ $\forall w > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Если $\Delta c \in K_c^1(\Delta b)$, то в силу (26.3) с необходимостью выполняется

$$0 \leqslant (f[\Delta b] + \Delta c)0^+(x) = (f[\Delta b + w] + \Delta c)0^+(x) \quad \forall w > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Отсюда, используя свойства функций $(f[\Delta b + w] + \Delta c)0^+(x)$ и $f[\Delta b + w](x)$ (см. [72, с. 134, 244]), получаем $-\Delta c \in \operatorname{cl}\operatorname{dom} f^*[\Delta b + w] = \operatorname{cl}\left(\bigcup\limits_{x \in \mathbf{R}^n} \partial f[\Delta b + w](x)\right)$, где cl — операция замыкания, $f^*[\Delta b + w](x)$ — функция, сопряженная к $f[\Delta b + w](x)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x^\varepsilon \in \mathbf{R}^n$, $z^\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ такие, что $\|z^\varepsilon\| < \varepsilon$, $-\Delta c - z^\varepsilon \in \partial f[\Delta b + w](x^\varepsilon)$. В силу определения субдифференциала это означает, что функция $f[\Delta b + w](x) + (\Delta c + z^\varepsilon, x)$ достигает минимума в точке x^ε. Иными словами, x^ε является решением задачи

$$\sup\{f_0(x) - (\Delta c + z^\varepsilon, x)\colon x \in M(\Delta b + w)\}. \tag{26.9}$$

Из непустоты $M(\Delta b)$ и выпуклости $f_1, \ldots, f_m$ вытекает существование точки x^0 из относительной внутренности множества M такой, что $f(x^0) < \Delta b + w$. Тогда применение теоремы Куна — Таккера (см., например, теорему 21.1 из [36] — условия регулярности будут выполняться, если перейти от $\mathbf{R}^n$ к аффинной оболочке M) дает $[\Delta c + z^\varepsilon, \Delta b + w] \in K$. Так как $w > 0$ и z^ε можно выбрать сколь угодно малыми по норме, то $[\Delta c, \Delta b] \in \overline{K}$, следовательно, $K^1 \subset \overline{K}$. Отсюда ввиду (26.4) вытекает (26.5).

Первое из равенств (26.6) следует из (26.5), так как $V_c(\Delta b) = K_c^1(\Delta b)$ при $\Delta b \in K_b$. Включения $K_b \subset V_b(\Delta c)$ и $V_b(\Delta c) \subset \overline{K}_b$, где $\Delta c \in K_c$, вытекают соответственно из (26.8) и леммы 20.1 из [36].

Пусть $M = \mathbf{R}_+^n$ и даны $[\Delta c, \Delta b] \in \overline{K}$, $z > 0$, $w > 0$. Произвольная точка $[\Delta c', \Delta b'] \in K$, взятая из условия $z' = z + (\Delta c - \Delta c') > 0$, $w' = w + (\Delta b - \Delta b') > 0$, будет удовлетворять лемме 26.2 при $s = \Delta c'$, $p = 0$, $q = \Delta b'$.

Тогда из (26.2) получаем $[\Delta c + z,\ \Delta b + w] = [\Delta c' + z',\ \Delta b' + w'] \in K$.

Теорема доказана.

Из свойств а), б) и теоремы 26.1 вытекают

Следствие 26.1. *Множества $\overline{K}_c$, $\overline{K}_b$, $\overline{K}$ непусты и выпуклы.*

Следствие 26.2. *Пусть V — множество таких $[\Delta c,\ \Delta b]$, для которых хотя бы одно из чисел $v(\Delta c,\ \Delta b)$, $v^*(\Delta c,\ \Delta b)$ конечно. Тогда $\overline{V} = \overline{K}$.*

Как показывают соотношения (26.6), проблемы устранения неограниченности целевых функций задач $C(0,\ 0)$ и $C^*(0,\ 0)$ (на непустых допустимых множествах) непосредственно связаны с проблемами преодоления несовместности ограничений в задачах $C^*(0,\ 0)$ и $C(0,\ 0)$ соответственно. Эта симметричность наиболее полно выражена в случае линейного программирования.

Следующие примеры показывают, что в случаях, когда M не замкнуто, либо $f_1, \ldots, f_m, -f_0$ выпуклы и определены на M, но не являются непрерывными на M, соотношение (26.5) может не выполняться (во всех примерах $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^1$, $m = 1$ и выполняется $[0,\ 0] \in K^1$, $[0,\ 0] \notin \overline{K}$):

1) $f_0(x) = x$, $f_1(x) = -x$, $M = \{x\colon 0 \leqslant x < 1\}$;

2) $f_0(x) = x$, $f_1(x) = -1$ при $0 \leqslant x < 1$, $f_1(1) = 1$, $M = \{x\colon 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

3) $f_0(x) = x$ при $0 \leqslant x < 1$, $f_0(1) = 0$, $f_1(x) = -x$, $M = \{x\colon 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

26.3. Преобразование задач (26.1). В предположении непрерывности $d(x,\ u)$ для задачи

$$\mathscr{D}\colon\ \inf\{d(x,\ u)\colon\ [x,\ u] \in \overline{K}\}$$

в силу теоремы 26.1 выполняется $v = v_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, где $v = \operatorname{opt}\mathscr{D}$, v_i — оптимальные значения задач (26.1). Так как функции $d_i^{n+m}(x,\ u)$ непрерывны и соответствующие им множества $\{[x,\ u]\colon\ d_i^{n+m}(x,\ u) \leqslant \beta\}$ $(\beta \geqslant 0,\ i = 0, 1, 2)$ ограничены, то задача $\mathscr{D}$ для них, всегда имеет решение. Пусть $M = \mathbf{R}^n_+$, $[\Delta c,\ \Delta b]$ — решение задачи $\mathscr{D}$, тогда, применив (26.7), мы получим допустимую для каждой из задач (26.1) точку, значение $d(\Delta c + z,\ \Delta b + w)$ в которой сколь угодно близко к v.

Так как $\overline{K} = \overline{K}_c \times \overline{K}_b$, то аналогично случаю линейного программирования (см. [38, с. 98]) для $d(x,\ u)$, представимых в виде $d(x,\ u) = \Phi(d'(x),\ d''(u))$, где Φ — неубывающая на $\mathbf{R}^2_+$ функция двух переменных, задача $\mathscr{D}$

распадается на две независимые

$$\mathscr{D}_c\colon \inf\{d'(x)\colon x\in \overline{K}_c\},\quad \mathscr{D}_b\colon \inf\{d''(u)\colon u\in \overline{K}_b\}.$$

В частности, если $d(x, u) = d_i^{n+m}(x, u)$, то $d'(x) = d_i^n(x)$, $d''(u) = d_i^m(u)$ $(i = 0, 1, 2)$.

Таким образом, аппроксимация несобственной задачи C 1-го, 2-го или 3-го рода сводится соответственно к решению задач $\mathscr{D}_b$, $\mathscr{D}_c$ или их обеих.

Не останавливаясь подробно на решении задачи $\mathscr{D}_b$, отметим, что при наложении на функцию $d''(u)$ некоторых требований, которым, в частности, удовлетворяют все функции $d_i^m(u)$ $(i = 0, 1, 2)$, она сводится к задаче минимизации выпуклой функции на множестве M. Пример подобного сведения для случая ЛП можно найти в § 11.

26.4. Решение задачи $\mathfrak{D}_c$. Будем рассматривать следующий конкретный вид задачи $\mathscr{D}_c$:

$$\min\{\|\Delta c\|\colon\ \Delta c\in \overline{K}_c\}. \tag{26.10}$$

В силу непустоты, выпуклости и замкнутости множества $\overline{K}_c$ эта задача имеет единственное решение, которое обозначим через $\Delta\tilde{c}$.

Рассмотрим задачу

$$C(\lambda, p, q)\colon \max\{f_0(x) - f_0(p)\colon x\in M_{pq},\ \|x-p\|\leqslant\lambda\},$$

где $\lambda\geqslant 0$, $p\in M_{pq}$. Через $\tilde{M}(\lambda, p, q)$ и $\tilde{M}_{pq}$ обозначим множества решений задач $C(\lambda, p, q)$ и $\min\{\varphi(x) = -f_0(x) + f_0(p)\colon x\in M_{pq}\}$; $\sigma(\lambda, p, q) = \operatorname{opt} C(\lambda, p, q)$. Очевидно, $\tilde{M}(\lambda, p, q)\neq\varnothing$ для всех $\lambda\geqslant 0$.

Лемма 26.3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть $x, y, p\in\mathbf{R}^n$, $\|y\| = \lambda > 0$, $(x-p, y) < \lambda^2$. Тогда $\|\alpha(x-p) + (1-\alpha)y\| < \lambda$ при некотором $0<\alpha<1$.*

2. *Пусть $\tau(x)$ — выпуклая функция, $p+x^k\in M_{pq}\,\forall k$, $\|x^k\|\to\infty$, $x^k\|x^k\|^{-1}\to a$ при $k\to\infty$, последовательность значений $\tau(p+x^k)$ не возрастает. Тогда $\|a\| = 1$, $a\in G$, $\tau 0^+(a)\leqslant 0$.*

3. *Пусть $\lambda>0$, $p+y\in\tilde{M}(\lambda, p, q)$, причем не выполняется условие $\tilde{M}(\lambda, p, q) = \{p+y\}$, $\|y\| = \lambda$. Тогда $\tilde{M}(\mu, p, q)\subset\tilde{M}_{pq}$ $\forall\mu\geqslant\lambda$, $\varphi(x)\geqslant\varphi(p+y)$ $\forall x\in M_{pq}$.*

4. *Пусть $g\in G$, $x\in\mathbf{R}^n$, $1\leqslant j\leqslant m$, $h\in\partial f_j(x)$. Тогда $(h, g)\leqslant 0$.*

Доказательство. 1. Положив $z = x - p$, $(z, y) = \lambda^2 - \beta$, $\beta > 0$, имеем

$$\|\alpha z + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha^2\|z\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)(z, y) + (1-\alpha)^2\|y\|^2 = \\ = \alpha^2\|z\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)(\lambda^2 - \beta) + (1-\alpha)^2\lambda^2 = \\ = \lambda^2 + \alpha((1-\alpha)(-2\beta) + \alpha(\|z\|^2 - \lambda^2)) < \lambda^2$$

при достаточно малом $\alpha > 0$.

2. Равенство $\|a\| = 1$ очевидно, соотношение $a \in G$ следует из [72, с. 79]. Пусть $\tau 0^+(a) > 0$. Тогда в соответствии с (26.3) $\tau(p + \lambda a) > \tau(p)$ при некотором $\lambda > 0$. Так как последовательность $\tau(p + x^k)$ не возрастает и $\tau(x)$ выпукла, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_ε такой, что

$$\tau\left(p + \lambda\frac{x^k}{\|x^k\|}\right) \leqslant \frac{\|x^k\| - \lambda}{\|x^k\|}\tau(p) + \\ + \frac{\lambda}{\|x^k\|}\tau(p + x^k) \leqslant \tau(p) + \varepsilon$$

при $k \geqslant k_\varepsilon$. Это противоречит неравенству $\tau(p + \lambda a) > \tau(p)$ ввиду того, что $p + \lambda\frac{x^k}{\|x^k\|} \to p + \lambda a$ при $k \to \infty$.

3. Пусть $\|y\| < \lambda$, $p + x \in M_{pq}$, $\varphi(p + x) < \varphi(p + y)$. *Тогда при* $z = p + \alpha x + (1-\alpha)y$ и достаточно малом $\alpha > 0$ выполняется

$$\varphi(z) < \varphi(p + y), \quad \|z - p\| \leqslant \lambda, \quad z \in M_{pq},$$

что противоречит условию $p + y \in \tilde{M}(\lambda, p, q)$. Поэтому $\varphi(x) \geqslant \varphi(p + y)$ $\forall x \in M_{pq}$ и $\tilde{M}(\mu, p, q) \subset \tilde{M}_{pq}$ при $\mu \geqslant \lambda$.

Если же $\tilde{M}(\lambda, p, q)$ содержит две различные точки, то для $p + x$, лежащего внутри соединяющего их отрезка, справедливо $p + x \in \tilde{M}(\lambda, p, q)$, $\|x\| < \lambda$, т. е. выполнены условия рассмотренного выше случая.

4. Если $(h, g) = \beta > 0$, то по определению субградиента

$$f_j(x + \lambda g) \geqslant f_j(x) + (h, \lambda g) = f_j(x) + \lambda\beta \to +\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

что противоречит условию $g \in G$.

Лемма доказана.

Теорема 26.2. *Пусть дана задача* C, $M = \mathbf{R}^n_+$. *Тогда для любых* $p \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^m$, *удовлетворяющих условию*

$f(p) \leqslant q$, *справедливо*

$$\min\{\|\Delta c\|\colon \Delta c \in \overline{K}_c\} = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1}\sigma(\lambda, p, q), \tag{26.11}$$

$$\lambda^{-2}\sigma(\lambda, p, q)[\widetilde{M}(\lambda, p, q) - p] \subset \\ \subset \overline{K}_c \cap \{x\colon \|x\| \leqslant \lambda^{-1}\sigma(\lambda, p, q)\} \quad \forall\lambda > 0, \tag{26.12}$$

$$\lambda^{-2}\sigma(\lambda, p, q)[\widetilde{M}(\lambda, p, q) - p] \to \Delta\tilde{c} \quad \textit{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{26.13}$$

Формула (26.13) означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda' > 0$ такое, что $\|y - \Delta\tilde{c}\| < \varepsilon$ при всех $\lambda \geqslant \lambda'$, $y \in \lambda^{-2}\sigma(\lambda, p, q)[\widetilde{M}(\lambda, p, q) - p]$.

Доказательство. Начнем с обоснования (26.12). Зафиксировав произвольное $\lambda > 0$, рассмотрим два случая.

1) $\widetilde{M}(\lambda, p, q) - p = \{y\}$, $\|y\| = \lambda$. Ввиду п. 1 леммы 26.3 и единственности y для $x \in S_\lambda' = \{x' \in M_{pq}\colon (x' - p, y) < \lambda^2\}$ имеем $\varphi(p + \alpha(x - p) + (1 - \alpha)y) > \varphi(p + y)$. Тогда выпуклость φ дает $\varphi(x) > \varphi(p + y)$ $\forall x \in S_\lambda'$, откуда в силу непрерывности φ получаем

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(p + y) \quad \forall\, x \in S_\lambda = \{x' \in M_{pq}\colon (x' - p, y) \leqslant \lambda^2\}. \tag{26.14}$$

Обозначив через $\psi(x)$ целевую функцию задачи

$$\inf\{\varphi(x) - (y, x - p)\varphi(p + y)\lambda^{-2} + (z, x - p)\colon x \in M_{pq}\}, \tag{26.15}$$

где $z > 0$, $z \in \mathbf{R}^n$, в силу (26.14) имеем $\psi(p) = 0$, $\psi(x) > 0$ $\forall x \in S_\lambda \setminus S_\lambda'$. Тогда из выпуклости ψ и M_{pq} получаем $\psi(x) > 0$ $\forall x \in M_{pq} \setminus S_\lambda$. В то же время из (26.14) следует $\psi(x) \geqslant \varphi(p + y)$ $\forall x \in S_\lambda$. Поэтому применение леммы 26.2 и (26.5) к задаче (26.15) в силу произвольности $z > 0$ дает

$$-\lambda^{-2}\varphi(p + y)\{y\} = \lambda^{-2}\sigma(\lambda, p, q)[\widetilde{M}(\lambda, p, q) - p] \in \overline{K}_c.$$

2) Ввиду п. 3 леммы 26.3 невыполнение 1) позволяет применить лемму 26.2 к задаче $\min\{\varphi(x)\colon x \in M_{pq}\}$ (при $s = 0$). Тогда из (26.2) и (26.5) получаем $\mathbf{R}_+^n \subset \overline{K}_c$. Отсюда вытекает (26.12) (так как $\sigma(\lambda, p, q) \geqslant 0$, $\widetilde{M}(\lambda, p, q) - p \subset \mathbf{R}_+^n$), а также соотношение

$$\|\Delta\tilde{c}\| = 0 = \lim_{\lambda\to+\infty} (-\lambda^{-1}\varphi(p + y)) = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1}\sigma(\lambda, p, q). \tag{26.16}$$

Так как (26.16) доказывает (26.11) для случая 2), то для завершения доказательства (26.11) можно считать, что для каждого $\lambda > 0$ имеет место 1), то есть $\tilde{M}(\lambda, p, q) - p = \{x(\lambda)\}$, $\|x(\lambda)\| = \lambda$ $\forall \lambda > 0$. Пусть $\lambda_k \to +\infty$, $\lambda_k^{-1} x^k \to a$ при $k \to \infty$, где $x^k = x(\lambda_k)$. Тогда из п. 2 леммы 26.3 (при $\tau(x) \equiv \varphi(x)$), замкнутости G и перечисленных выше свойств функции $\varphi 0^+$ вытекает, что множество решений задачи (обозначим его $\tilde{G}$)

$$\min\{\varphi 0^+(x):\ x \in G,\ \|x\| = 1\} \tag{26.17}$$

непусто и ее значение $t \leqslant 0$. Из выпуклости φ получаем

$$\varphi\left(p + \lambda' \frac{x^k}{\lambda_k}\right) \leqslant \frac{\lambda_k - \lambda'}{\lambda_k} \varphi(p) + \frac{\lambda'}{\lambda_k} \varphi(p + x^k) =$$

$$= \frac{\lambda'}{\lambda_k} \varphi(p + x^k) \quad \forall \lambda' > 0, \quad \forall \lambda_k > \lambda'. \tag{26.18}$$

Обозначив $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\{\alpha_i:\ i \geqslant k\}$ и используя (26.3), (26.18), имеем

$$0 \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\frac{\varphi(p + \lambda_k a)}{\lambda_k} - \frac{\varphi(p + x^k)}{\lambda_k}\right] \leqslant \varphi 0^+(a) -$$

$$- \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda'} \varphi\left(p + \lambda' \frac{x^k}{\lambda_k}\right) = \varphi 0^+(a) - \frac{\varphi(p + \lambda' a)}{\lambda'} \quad \forall \lambda' > 0.$$

Так как последнее выражение стремится к нулю при $\lambda' \to +\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k^{-1} \varphi(p + x^k) = \varphi 0^+(a)$, и для любого $x' \in \tilde{G}$ $\varphi 0^+(x') = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varphi(p + \lambda_k x')}{\lambda_k} \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varphi(p + x^k)}{\lambda_k} = \varphi 0^+(a) \geqslant \varphi 0^+(x')$. Отсюда непосредственно вытекает

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\sigma(\lambda, p, q)}{\lambda} = - \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\varphi(p + x(\lambda))}{\lambda} = - \varphi 0^+(x') = - t. \tag{26.19}$$

Если $t = 0$, то из (26.19) и (26.12) получаем $\|\Delta \tilde{c}\| = 0 = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1} \sigma(\lambda, p, q)$, что доказывает (26.11).

Пусть теперь $t < 0$. Предположим, что $\|\Delta \tilde{c}\| < -t$. Тогда для $\varepsilon < -\|\Delta \tilde{c}\| - t$, $\varepsilon > 0$ и произвольных $z \in \mathbf{R}^n$, $\|z\| \leqslant 1$, $x' \in \tilde{G}$ в соответствии с [72, с. 94] имеем $(\varphi + \Delta \tilde{c} + \varepsilon z) 0^+(x') = \varphi 0^+(x') + (\Delta \tilde{c},\ x') + \varepsilon(z,\ x') \leqslant t + \|\Delta \tilde{c}\| + \varepsilon < 0$. Таким образом, $\inf\{\varphi(x) + (\Delta \tilde{c} + \varepsilon z,\ x):\ x = y' + \mu x',$

$\mu \geqslant 0\} = -\infty$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$, $\|z\| \leqslant 1$, $y' \in \mathbf{R}^n$. Так как $x' \in G$, то $\{y' + \mu x'\colon \mu \geqslant 0\} \subset M(\Delta b)$ при $y' \in M(\Delta b)$, $\Delta b \in K_b$. В итоге получаем $v(\Delta\tilde{c} + \varepsilon z, \Delta b) = +\infty$ при $\Delta b \in K_b$, $\|z\| \leqslant 1$. Это противоречит тому, что $\Delta\tilde{c} \in \overline{K}_c$.

Итак, $\|\Delta\tilde{c}\| \geqslant -t$, что вместе с (26.19) и (26.12) дает (26.11). Соотношение (26.13) вытекает из (26.11) и (26.12). Теорема доказана.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — строки единичной $n \times n$ матрицы, $P_Q(\cdot)$ — оператор проектирования на выпуклое множество Q, $G^* = \{x \in \mathbf{R}^n\colon (x, y) \leqslant 0 \quad \forall y \in G\}$. Для $x^\lambda \in \mathbf{R}^n$ обозначим $l(\lambda) = (x^\lambda - p)\|x^\lambda - p\|^{-1}$, $L(\lambda) = \{x\colon x = \alpha l(\lambda),\ \alpha \in \mathbf{R}\}$ (в случае $x^\lambda = p$ положим $l(\lambda) = P_{L(\lambda)}(h) = 0$ для всех h),

$$h_j^\lambda = \nabla f_j(x^\lambda), \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

$$G(\lambda) = \operatorname{cone}\{h_j^\lambda, -e_i\colon j \in \mathbf{N}_m,\ i \in \mathbf{N}_n\}.$$

Теорема 26.3. *Пусть в задаче C $M = \mathbf{R}^n_+$, функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ дифференцируемы на $\mathbf{R}^n$. Если $f(p) < q$ и $x^\lambda \in \widetilde{M}(\lambda, p, q)$ $\forall \lambda > 0$, то для каждого $\lambda > 0$ выполняются соотношения*

$$h_0^\lambda - g^* \in \overline{K}_c, \quad h_0^\lambda - g' \in \overline{K}_c,$$

$$P_{L(\lambda)}(h_0^\lambda) \in \overline{K}_c \quad \forall g^* \in G^*, \quad \forall g' \in G(\lambda); \tag{26.20}$$

$$\|\Delta\tilde{c}\| \leqslant \|P_G(h_0^\lambda)\| \leqslant \|h_0^\lambda - P_{G(\lambda)}(h_0^\lambda)\| \leqslant \|P_{L(\lambda)}(h_0^\lambda)\| \tag{26.21}$$

(причем $P_G(h_0^\lambda) = h_0^\lambda - P_{G^*}(h_0^\lambda)$); если $\|x^\lambda - p\| = \lambda$, то $\|P_{L(\lambda)}(h_0^\lambda)\| \leqslant \lambda^{-1}\sigma(\lambda, p, q)$. При этом, если $\|x^\lambda - p\| = \lambda$ $\forall \lambda > 0$, то $\Delta\tilde{c} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} P_G(h_0^\lambda) =$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} (h_0^\lambda - P_{G(\lambda)}(h_0^\lambda)) = \lim_{\lambda \to +\infty} P_{L(\lambda)}(h_0^\lambda). \tag{26.22}$$

Если же $\|x^\lambda - p\| < \lambda$ при некотором $\lambda > 0$, то $\|\Delta\tilde{c}\| = 0 = \|h_0^\mu - P_{G(\mu)}(h_0^\mu)\|$ $\forall \mu \geqslant \lambda$.

Отметим, что условие $\|x^\lambda - p\| = \lambda$ выполняется при всех $\lambda > 0$, например, для задач C, в которых $v(0, 0) = +\infty$.

Доказательство. Зафиксировав произвольное $\lambda > 0$, для упрощения записи обозначим $y = x^\lambda$, $h_j = h_j^\lambda$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, $G' = G(\lambda)$, $l = l(\lambda)$, $L = L(\lambda)$. Напомним, что, как известно,

$$\{\nabla f_j(x)\} = \partial f_j(x), \quad \{\nabla f_0(x)\} = -\partial(-f_0(x))$$
$$\forall j \in \mathbf{N}_m, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Так как $G \subset \mathbf{R}^n_+$, то положив $\psi(x) = \varphi(x) + (h_0 - g^* + z, x)$, где $g^* \in G^*$, $z > 0$, для всех $g \in G$, $g \neq 0$ имеем $(-h_0 + h_0 - g^* + z, g) = (-g^* + z, g) > 0$,

$$\{-g^* + z\} = \partial\psi(y). \quad (26.23)$$

Пусть $\inf\{\psi(x)\colon x \in M_{pq}\} = \alpha = -\infty$, тогда $\psi(p + x^k) \to -\infty$, $x^k\|x^k\|^{-1} \to a$, $\|x^k\| \to \infty$ при $k \to \infty$ при некоторых $p + x^k \in M_{pq}$. Тогда, применяя п. 2 леммы 26.3 (при $\tau(x) \equiv \psi(x)$), получаем противоречие, так как из (26.23) вытекает $\psi 0^+(g) > 0$ $\forall g \in G$, $g \neq 0$. Поэтому α конечно, и из леммы 26.2 (при $s = h_0 - g^* + z$) в силу произвольности $z > 0$ получаем $h_0 - g^* \in \overline{K}_c$. Отсюда следует $h_0 - g' \in \overline{K}_c$, так как $G' \subset G^*$ ввиду п. 4 леммы 26.3.

Неравенство $f(p) < q$ позволяет применить к задаче $C(\lambda, p, q)$ условия оптимальности (см., например, [36, с. 108]:

$$h_0 = h' + h'', \quad h' = \sum_{j=1}^{n} u_j h_j - z, \quad h'' = u_0 l, \quad (26.24)$$

где $u = [u_1, \ldots, u_m] \geqslant 0$, $(u, f(y) - q) = 0$, $z \geqslant 0$, $(z, y - p) = 0$, $u_0 \geqslant 0$. Отсюда, используя соотношения $f(p) < q$, $p \in M_{pq}$ и определение субградиента, получаем

$$u_j > 0 \Rightarrow f_j(y) = q_j \Rightarrow (h_j, l) \geqslant 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m;$$
$$z_j > 0 \Rightarrow (-e_i, l) \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n.$$

Следовательно, $(h', l) \geqslant 0$,

$$\|h''\| = (l, h'') = (l, h_0 - h') \leqslant (l, h_0) = \|P_L(h_0)\|. \quad (26.25)$$

Итак, $P_L(h_0) = h'' + \mu l$, где $\mu l \geqslant 0$. Кроме того, $h'' \in \overline{K}_c$, так как $h'' = h_0 - h'$, $h' \in G'$. В итоге, применяя (26.5), имеем $P_L(h_0) \in \overline{K}_c$.

Из свойств проекции на выпуклое множество легко вытекает равенство $P_G(h_0) = h_0 - P_{G^*}(h_0)$. Тогда соотношение $\|P_G(h_0)\| \leqslant \|h_0 - P_{G'}(h_0)\|$ вытекает из $G' \subset G^*$. Из (26.25) следует $\|h_0 - P_{G'}(h_0)\| \leqslant \|h_0 - h'\| = \|h''\| \leqslant \|P_L(h_0)\|$.

Так как $\{-h_0\} = \partial\varphi(y)$, то $\lambda^{-1}\|P_L(h_0)\|\cdot\|p - y\| = \lambda^{-1}(-h_0, p - y) \leqslant \lambda^{-1}[\varphi(p) - \varphi(y)] = \lambda^{-1}\sigma(\lambda, p, q)$. В случае $\lambda=\|y-p\|$ отсюда вытекает оценка $\|P_L(h_0)\|\leqslant \leqslant \lambda^{-1}\sigma(\lambda, p, q)$, что, как нетрудно видеть, в силу (26.20), (26.21) и (26.11) дает (26.22). Если же $\|y-p\|<\lambda$, то ввиду п. 3 леммы 26.3 $x^\mu\in\tilde{M}_{pq}$ $\forall\mu\geqslant\lambda$. Поэтому в соответствующем x^μ разложении (26.24) вектор h'' отсутствует, следовательно, $h_0^\mu\in G(\mu)$, $\left\|h_0^\mu-P_G\left(h_0^\mu\right)\right\|=0$.

Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 26.2, 26.3 определяют метод поиска $\Delta\tilde{c}$ — решения задачи (26.10), сводя его к решению задач вида $C(\lambda, p, q)$.

26.5. Однопараметрическая аппроксимация. Рассмотрим другой возможный подход к аппроксимации несобственной задачи C. Зафиксировав $\Delta c\in\mathbf{R}^n$, $\Delta b\in\mathbf{R}^m$, поставим в соответствие C класс задач вида

$$C(t):\ \sup\{f_0(x)-(t\Delta c, x):\ f(x)\leqslant t\Delta b,\ x\in M\},$$

зависящих от скалярного параметра t. Выпишем задачу аппроксимации

$$\mathscr{D}^0:\ \inf\{t:\ t[\Delta c, \Delta b]\in\bar{K},\ t\geqslant 0\}.$$

Так как $\bar{K}=\bar{K}_c\times\bar{K}_b$, то задача $\mathscr{D}^0$ распадается на две независимые:

$$\mathscr{D}_c^0:\ \inf\{t:\ t\Delta c\in\bar{K}_c,\ t\geqslant 0\},$$

$$\mathscr{D}_b^0:\ \inf\{t:\ t\Delta b\in\bar{K}_b,\ t\geqslant 0\},$$

причем

$$\operatorname{opt}\mathscr{D}^0=\tilde{t}=\inf\{t:\ t\Delta c\in\bar{K}_c,\ t\Delta b\in\bar{K}_b,\ t\geqslant 0\}.$$

Отметим, что, как и в случае $\mathscr{D}_b$, задача

$$\mathscr{D}_b^{0'}:\ \inf\{t:\ t\Delta b\in K_b,\ t\geqslant 0\}$$

легко сводится к задаче выпуклого программирования (например, вида

$$\inf\{t:\ f_j(x)-t\Delta b_j\leqslant 0\quad\forall j\in\mathbf{N}_m,\ t\geqslant 0,\ x\in M\},$$

где целевая функция является линейной, а ограничения — выпуклыми функциями от $[x_1, \ldots, x_n, t]\in\mathbf{R}^{n+1}$). Выполнение равенства $\operatorname{opt}\mathscr{D}_b^0=t_b=t_b'=\operatorname{opt}\mathscr{D}_b^{0'}$ гарантировано, например, в случае $\Delta b>0$ (ибо тогда из $t_b\Delta b\in \in\bar{K}_b$, $t>t_b$, очевидно, следует $t\Delta b\in K_b$).

Обратимся теперь к решению задачи $\mathscr{D}_c^0$.

Л е м м а 26.4. *Пусть* $M=\mathbf{R}_+^n$, $\Delta c>0$. *Тогда задача* $\mathscr{D}_c^0$ *разрешима*, $t\Delta c\in K_c$ $\forall t>t_c=\operatorname{opt}\mathscr{D}_c^0$.

Доказательство. Пусть $\Delta c' \in K_c$. Тогда при достаточно большом $t' > 0$ выполняется $t'\Delta c - \Delta c' > 0$. Отсюда с помощью (26.7) получаем $t'\Delta c = \Delta c' + (t'\Delta c - \Delta c') \in K_c$, что влечет разрешимость $\mathscr{D}_c^0$. Соотношение $t\Delta c \in K_c$ $\forall t > t_c$ следует из $\Delta c > 0$ и (26.7).

Рассмотрим задачу

$$C^0(\lambda, p, q):\ \sup\{-\varphi(x) = f_0(x) - f_0(p):\ (\Delta c, x - p) \leqslant \lambda,\quad x \in M_{pq}\},$$

где $\lambda \geqslant 0$, $p \in M_{pq}$. Очевидно, $M^0(\lambda, p, q)$ — множество решений задачи $C^0(\lambda, p, q)$ — непусто при $\Delta c > 0$, $f(p) \leqslant q$, $\lambda \geqslant 0$.

Теорема 26.4. *Пусть дана задача C, $M = \mathbf{R}_+^n$, $\Delta c > 0$. Тогда для любых $p \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^m$, удовлетворяющих условию $f(p) \leqslant q$, справедливо*

$$t_c = \min\{\,|t|:\ t\Delta c \in \overline{K}_c\} = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q); \tag{26.26}$$

$$\lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)\,\Delta c \in \overline{K}_c \quad \forall\lambda > 0, \tag{26.27}$$

где $\omega(\lambda, p, q) = \operatorname{opt} C^0(\lambda, p, q)$.

Доказательство. Начнем с обоснования (26.27). Зафиксируем $\lambda > 0$. Если $S_\lambda = \{x' \in M_{pq}:\ (\Delta c, x' - p) = \lambda\} = \varnothing$, то множество M_{pq} ограничено. Тогда $\inf\{-f_0(x):\ x \in M_{pq}\} > -\infty$, что в силу леммы 26.2 и (26.5) влечет $0 \in \overline{K}_c$. Так как $\omega(\lambda, p, q) \geqslant 0$, то справедливость (26.27) следует из (26.7).

Если же $S_\lambda \neq \varnothing$, то для любых $x \in S_\lambda$, $z > 0$ $(z \in \mathbf{R}^n)$ выполняется

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)(\Delta c, x - p) + (z, x - p) = \varphi(x) + \omega(\lambda, p, q) + (z, x - p) \geqslant (z, x - p) > 0.$$

Таким образом, $\psi(p) = 0$, $\psi(x) > 0$ $\forall x \in S_\lambda$. В силу выпуклости ψ и ограниченности множества $S'_\lambda = \{x' \in M_{pq}:\ (\Delta c, x' - p) \leqslant \lambda\}$ отсюда получаем

$$\psi(x) > 0 \quad \forall x \in M_{pq} \setminus S'_\lambda, \quad \inf\{\psi(x):\ x \in M_{pq}\} > -\infty.$$

Тогда применение леммы 26.2 (при $s = \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)\Delta c + z$) и (26.5) дает $\lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)\Delta c + z \in \overline{K}_c$, что ввиду произвольности $z > 0$ влечет (26.27).

Если $t_c \neq \inf\{|t|:\ t\Delta c \in \overline{K}_c\}$, то необходимо $0 \notin \overline{K}_c$. Но тогда с учетом леммы 26.4 имеем $t_1\Delta c \in \overline{K}_c$, $t_2\Delta c \in \overline{K}_c$ при некоторых $t_1 < 0$, $t_2 > 0$, что противоречит соотношению $0 \notin \overline{K}_c$ ввиду выпуклости $\overline{K}_c$.

Пусть при некоторых $\lambda_1 > 0$, $x^1 \in M^0(\lambda_1, p, q)$ выполняется $(\Delta c, x^1 - p) < \lambda_1$. Тогда аналогично п. 3 леммы 26.3 показывается, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(x^1)$ $\forall x \in M_{pq}$, и, следовательно, $\omega(\lambda, p, q) = \omega(\lambda_1, p, q)$ $\forall \lambda \geqslant \lambda_1$. Применяя лемму 26.2 (при $s = 0$) и (26.5), имеем $0 \in \overline{K}_c$. В итоге получаем (26.26).

Теперь для завершения доказательства (26.26) можно считать, что $(\Delta c, x) = \lambda$ $\forall \lambda > 0, \forall x \in M^0(\lambda, p, q) - p$. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $x^2 \in M^0(\lambda_2, p, q) - p$, $x^1 = \lambda_2^{-1}\lambda_1 x^2$. Ввиду выпуклости φ и M_{pq} отсюда получаем: $x^1 \in M^0(\lambda_1, p, q) - p$ (так как $(\Delta c, x^1) = \lambda_1$),

$$-\omega(\lambda_1, p, q) \leqslant \varphi(p + x^1) = \varphi\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(p + x^2) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} p\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\varphi(p + x^2) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\omega(\lambda_2, p, q).$$

Следовательно, $\lambda_1^{-1}\omega(\lambda_1, p, q) \geqslant \lambda_2^{-1}\omega(\lambda_2 p, q) \geqslant 0$, т. е. $\lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)$ — невозрастающая функция λ и существует $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q) = t_0 \geqslant 0$.

Предположим, что $t_c < t_0$. Обозначим $\tau(x) = \varphi(x) + t'(\Delta c, x - p)$, где $t_c < t' < t_0$. Взяв произвольную последовательность $\{\lambda_k\}$ такую, что

$$\lambda_k \to +\infty, \quad \frac{x^k}{\|x^k\|} \to a \text{ при } k \to \infty, \quad p + x^k \in M^0(\lambda_k, p, q),$$

имеем

$$\tau(p + x^k) = \varphi(p + x^k) + t_0(\Delta c, x^k) - (t_0 - t')(\Delta c, x^k) =$$
$$= -\omega(\lambda_k, p, q) + t_0\lambda_k - (t_0 - t')\lambda_k =$$
$$= \lambda_k\left[\left(t_0 - \frac{\omega(\lambda_k, p, q)}{\lambda_k}\right) - (t_0 - t')\right].$$

Отсюда видно, что для любого $\delta > 0$, $\delta < t_0 - t'$ найдется k_δ такое, что

$$\tau(p + x^k) \leqslant -\lambda_k(t_0 - t' - \delta) \quad \forall k \geqslant k_\delta.$$

Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\tau(p + x^k)$ не возрастает, что согласно п. 2 леммы 26.3 и [72, с. 94] влечет $\|a\| = 1$, $a \in G$, $\tau 0^+(a) = \varphi 0^+(a) + t'(\Delta c, a) \leqslant 0$. Поэтому

$$(\varphi + t_c\Delta c + \varepsilon z)0^+(a) = \tau 0^+(a) - (t' - t_c)(\Delta c, a) + \varepsilon(z, a) \leqslant$$
$$\leqslant -(t' - t_c)(\Delta c, a) + \varepsilon(z, a) < 0$$

при $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < (t' - t_c)(\Delta c, a)$ и любых $z \in \mathbf{R}^n$, $\|z\| \leqslant 1$. Здесь $(\Delta c, a) > 0$ ввиду того, что $a \in G \subset \mathbf{R}^n_+$. В соответствии с (26.3) это означает, что

$$\inf\{\varphi(x) + t_c(\Delta c, x) + \varepsilon(z, x)\colon x = x' + \mu a,\ \mu \geqslant 0\} = -\infty$$

при любых $x' \in \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{R}^n$, $\|z\| \leqslant 1$. Так как $a \in G$, то $\{x' + \mu a\colon \mu \geqslant 0\} \subset M(\Delta b)$ при $\Delta b \in K_b$, $x' \in M(\Delta b)$. В итоге получаем $v(t_c\Delta c + \varepsilon z, \Delta b) = +\infty$ при любых $\Delta b \in K_b$, $\|z\| \leqslant 1$. Это противоречит тому, что $t_c\Delta c \in \overline{K}_c$.

Таким образом, $t_c \geqslant t_0 = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)$, что в силу (26.27) дает $t_c = t_0$. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ дифференцируемы. Пусть $h_j^\lambda = \nabla f_j(x^\lambda)$, где $x^\lambda \in M^0(\lambda, p, q)$, $\lambda \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Обозначениям e_i $(i \in \mathbf{N}_n)$, G^*, $G(\lambda)$ придадим тот же смысл, что и в теореме 26.3. Для каждого $\lambda > 0$ определим

$$t_\lambda^* = \min\{t\colon h_0^\lambda - t\Delta c \in G^*,\ t \geqslant 0\},$$
$$t_\lambda' = \min\{t\colon h_0^\lambda - t\Delta c \in G(\lambda),\ t \geqslant 0\}.$$

Теорема 26.5. *Пусть в задаче C функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ дифференцируемы на $\mathbf{R}^n$, $M = \mathbf{R}^n_+$ и выполняется условие $f(p) < q$. Тогда для любых $\lambda > 0$, $x^\lambda \in M^0(\lambda, p, q)$ справедливо*:

$$\text{если } h_0^\lambda - t\Delta c \in G^* \text{ или } h_0^\lambda - t\Delta c \in G(\lambda), \text{ то } t\Delta c \in \overline{K}_c; \tag{26.28}$$

$$t_c \leqslant t_\lambda^* \leqslant t_\lambda' \leqslant \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q). \tag{26.29}$$

При этом

$$\lim_{\lambda\to+\infty} t_\lambda^* = \lim_{\lambda\to+\infty} t_\lambda' = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q) = t_c. \tag{26.30}$$

Доказательство. Справедливость (26.28) вытекает из соотношения (26.20) теоремы 26.3. Зафиксировав произвольное $\lambda > 0$, для упрощения записи обозначим $y = x^\lambda$, $h_j = h_j^\lambda$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, $G' = G(\lambda)$.

Выполнение условия $f(p) < q$ позволяет применить к задаче $C^0(\lambda, p, q)$ условия оптимальности (см., например, [36, с. 108]):

$$h_0 = h' + h'',\quad h' = \sum_{j=1}^m u_j h_j - z,\quad h'' = u_0\Delta c, \tag{26.31}$$

где $u_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $z \geqslant 0$. Если $u_0 = 0$, то $h_0 = h' \in G'$, следовательно, $t'_\lambda = 0 \leqslant \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)$.

Пусть теперь $u_0 > 0$. Предполагая, что y — решение задачи $\min\{\varphi(x)\colon x \in M_{pq}\}$ и применяя условие оптимальности, приходим к соотношению вида (26.31), в котором $u_0 = 0$, что противоречит предположению. Так как $y \in M^0(\lambda, p, q)$, то отсюда вытекает существование $x' \in M_{pq}$ такого, что $\varphi(x') < \varphi(y)$, $(\Delta c, x' - p) > \lambda$. Из соотношений $\psi(x) = \varphi(x) + \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)(\Delta c, x - p) = \varphi(x) + \omega(\lambda, p, q) \geqslant 0$ (при $x \in M_{pq}$, $(\Delta c, x - p) = \lambda$), $\psi(y) = \varphi(y) + \omega(\lambda, p, q) = 0$, $\psi(p) = 0$ и выпуклости ψ следует неравенство $\psi(y) = 0 \leqslant \psi(x)$ при $x \in M_{pq}$, $(\Delta c, x - p) \geqslant \lambda$, т. е. y является решением задачи

$$\min\{\psi(x)\colon (\Delta c, x - p) \geqslant \lambda,\ f(x) \leqslant q,\ x \geqslant p\}. \tag{26.32}$$

Так как $f(p) < q$ и $x' \in M_{pq}$, то для $x'' = \alpha p + (1 - \alpha)x'$, где $\alpha > 0$ и достаточно мало́, в силу выпуклости функций $f_1, \ldots, f_m$ выполняется $f(x'') < q$, $x'' \geqslant p$, $(\Delta c, x'' - p) > \lambda$. Это позволяет применить к задаче (26.32) условия оптимальности:

$$-\psi(y) = h_0 - \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)\,\Delta c = \sum_{j=1}^{m} v_j h_j - z' + v_0(-\Delta c),$$

где $v_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $z' \geqslant 0$. Отсюда следует $h_0 - \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)\,\Delta c \in G'$. Таким образом, $t'_\lambda \leqslant \lambda^{-1}\omega(\lambda, p, q)$.

Из п. 4 леммы 26.3 вытекает включение $G' \subset G^*$. Поэтому $t^*_\lambda \leqslant t'_\lambda$. Неравенство $t_c \leqslant t^*_\lambda$ вытекает из (26.28). Соотношение (26.30) является следствием (26.29) и теоремы 26.4. Теорема доказана.

Замечание 26.1. Решение задачи

$$\inf\{d_0^n(z)\colon z \in \overline{K}_c\} \tag{26.33}$$

при $M = \mathbf{R}^n_+$ сводится к решению задачи $\mathscr{D}^0_c$ для $\Delta c = e = [1, \ldots, 1]$. В самом деле, покажем, что из принадлежности Δc^0 множеству M_0 решений задачи (26.33) вытекает $t_0 e \in M_0$, где $t_0 = d_0^n(\Delta c^0)$. Пусть это не так, тогда $t_1 e \notin \overline{K}_c$ при некотором $t_1 > t_0$. Так как $t_1 e - \Delta c^0 > 0$, то согласно лемме 26.4 при некотором $t' > 1$ выполняется $t(t_1 e - \Delta c^0) \in \overline{K}_c\ \forall\, t \geqslant t'$. Тогда в силу выпуклости $\overline{K}_c$ для любых $t \geqslant t'$ имеем

$$\overline{K}_c \ni t^{-1}t(t_1 e - \Delta c^0) + (1 - t^{-1})\Delta c^0 = \\ = t_1 e - t^{-1}\Delta c^0 \to t_1 e \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

что противоречит условию $t_1 e \notin \overline{K}_c$. Аналогично показывается, что в общем случае задача $\mathcal{D}_c^0$, в которой $M = \mathbf{R}_+^n$, $\Delta c > 0$, соответствует задаче

$$\inf\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta c_i^{-1}|z_i|:\ z\in\overline{K}_c\right\}.$$

§ 27. Методы коррекции несобственных задач выпуклого программирования 1-го рода, основанные на последовательном программировании

Объектом исследования в данном параграфе является задача

$$\max\{f(x):\ f_j(x)\leqslant 0\quad \forall j\in\mathbf{N}_m,\ x\in Q\},\qquad (27.1)$$

в которой $-f(x)$, $f_j(x)$, $j\in\mathbf{N}_m$,— определенные на $\mathbf{R}^n$ выпуклые функции, Q — замкнутое выпуклое множество из $\mathbf{R}^n$; для первых l ограничений задачи (27.1) выполняется соотношение $M=\{x:\ f_j(x)\leqslant 0\ \ \forall j\in J_1=\mathbf{N}_m\setminus\mathbf{N}_l,\ x\in Q\}\neq\varnothing$, в то время как сведения о непустоте множества $M\cap\{x:\ f_j(x)\leqslant 0\ \ \forall j\in J_0=\mathbf{N}_m\}$ отсутствуют.

Построим для (27.1) следующую аппроксимирующую задачу:

$$\sup\{f(x):\ \varphi(x)\leqslant\tilde{\varphi},\quad x\in M\},\qquad (27.2)$$

где $\tilde{\varphi}=\inf\{\varphi(x):\ x\in M\}$, $\varphi(x)=\omega(z(x))$, $z(x)=[\alpha_1 f_1^+(x),\ldots,\alpha_l f_l^+(x)]$, $\alpha_j\geqslant 1$, $j\in J_0$, $\omega=\omega(z)$ — выпуклая неубывающая функция, определенная для $z\in\mathbf{R}_+^l$ и удовлетворяющая условиям

$$\omega(0)=0,\quad \omega(z)=\omega(z_1,\ldots,z_l)\geqslant\beta\sum_{j=1}^{l} z_j^{\delta_j},\qquad (27.3)$$

β, δ_j, $j\in\mathbf{N}_l$ — положительные числа.

Если ограничения (27.1) совместны, то из определения $\varphi=\varphi(x)$ вытекает, что $\tilde{\varphi}=0$ и $X=\operatorname{Arg\,min}\{\varphi(x):\ x\in M\}$ совпадает с допустимым множеством (27.1). Задачу вида (27.2) можно, как мы видели выше, интерпретировать как двухступенчатую задачу последовательного программирования. Цель данного параграфа заключается в нахождении условий, при которых возможно сведение решения зацачи (27.2) к анализу единой экстремальной задачи.

Построим для задачи (27.2) функцию

$$p(x, \lambda) = \lambda_1 \varphi(x) - \lambda_2 f(x),$$

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2] > 0$, и рассмотрим проблему нахождения

$$\inf\{p(x, \lambda): x \in M\}. \tag{27.4}$$

Нам понадобится ниже следующее условие на задачу (27.1) (назовем его условием *$\bar{\gamma}$-ограниченности*): существуют индексы $j_1, \ldots, j_q$ ($j_i \in \mathbf{N}_m$ $\forall i \in \mathbf{N}_q$, $q \geqslant 1$) такие, что множество $S^{\bar{\gamma}} = \bigcap\limits_{i=1}^{q} \{x: f_{j_i}(x) \leqslant \bar{\gamma}\}$ непусто и ограничено для некоторого $\bar{\gamma} \in \mathbf{R}^1_+$.

Теорема 27.1. *Пусть для задачи* (27.1) *выполнено условие $\bar{\gamma}$-ограниченности и $f(x) \leqslant \bar{f} < +\infty$ $\forall x \in M$. Тогда*:

1) *$X^* \neq \varnothing$, где X^* — множество оптимальных решений задачи* (27.2).

2) *Для любого $\lambda > 0$ задача* (27.4) *разрешима в некоторой точке x_λ.*

3) *Имеют место соотношения*

$$f(x_\lambda) \searrow f^*, \quad \varphi(x_\lambda) \searrow \tilde{\varphi}, \quad |x_\lambda - X^*| \to 0$$

при $\beta(\lambda) \searrow 0$, где $\beta(\lambda) = \lambda_2/\lambda_1$, f^* — оптимальное значение задачи (27.2).

Доказательство. 1) Из выполнения условия $\bar{\gamma}$-ограниченности вытекает ограниченность множеств $S^{\gamma} = \bigcap\limits_{i=1}^{q} \{x: f_{j_i}(x) \leqslant \gamma\}$ для $\gamma \geqslant \bar{\gamma}$. Если $j_i \in J_1$ $\forall i \in \mathbf{N}_q$, то M — ограничено, а следовательно, допустимое множество X задачи (27.2) непусто и ограничено, и, тем самым, $X^* \neq \varnothing$. Поэтому будем считать, что $\bar{J} \neq \varnothing$, где $\bar{J} = \{j_1, \ldots, j_q\} \cap J_0$. Очевидно, что $\inf\{\varphi(x): x \in M\} = \varphi \geqslant 0$. Пусть последовательность $\{x_k\}$ такова, что $x_k \in M$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \tilde{\varphi}$. Выберем $\gamma_0 \geqslant \bar{\gamma}$ так, чтобы $\gamma_0 > \max\left\{1, \frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{2\tilde{\varphi}}{\beta}\right)^{\delta_0^{-1}}\right\}$, $S^{\gamma_0} \cap M \neq \varnothing$ $\left(\alpha_0 = \min\limits_{j\in \mathbf{N}_l} \alpha_j, \quad \delta_0 = \min\limits_{j \in \mathbf{N}_l} \delta_j\right)$.

Возможны два случая. а) Найдется число $K \in \mathbf{N}$ такое, что $x_k \in S^{\gamma_0} \cap M$ для всех $k \geqslant K$. Тогда, очевидно, любая предельная точка x' последовательности $\{x_k\}$ решает задачу $\inf\limits_{x\in M} \varphi(x)$, т. е. $x'\in X$. б) Можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_i}\}\subset\{x_k\}$, для которой $x_{k_i}\in M$, $x_{k_i}\notin S^{\gamma_0}$. Тогда в силу (27.3) и выбора γ_0 имеем $\varphi(x_{k_i})\geqslant\beta\sum\limits_{j=1}^{l}\alpha_j^{\delta_j}f_j^{+\delta_j}(x_{k_i})>\beta\alpha_0^{\delta_0}\gamma_0^{\delta_0}>2\tilde{\varphi}$ для любого $i\in\in\mathbf{N}$. Получили противоречие с определением $\{x_k\}$.

Таким образом, $X\neq\varnothing$. Покажем ограниченность X. Пусть $y\in X$ и $t\in\bar{J}$. Согласно определению γ_0 и (27.3) имеем $\alpha_0^{\delta_0}\beta\gamma_0^{\delta_t}>\alpha_0^{\delta_0}\beta\gamma_0^{\delta_0}>\tilde{\varphi}\geqslant\varphi(y)\geqslant\beta\sum\limits_{j=1}^{l}\alpha_j^{\delta_j}f_j^{+\delta_j}(y)\geqslant\geqslant\beta\alpha_t^{\delta_t}f_t^{+\delta_t}(y)\geqslant\beta\alpha_0^{\delta_0}f_t^{+\delta_t}(y)$, откуда $f_t(y)\leqslant\gamma_0$. Если $j\in\in\{j_1,\ldots,j_q\}\setminus\bar{J}$, то $f_j(y)\leqslant 0<\gamma_0$. Итак, $y\in S^{\gamma_0}$ и, следовательно, X ограничено, а $X^*\neq\varnothing$.

2) Пусть $\beta(\lambda)\leqslant C$ $\forall\lambda\in\Lambda\subset\mathbf{R}_+^2$, $C=\mathrm{const}$. Из ограниченности X вытекает ограниченность множества $V=\{x\colon\ x\in M,\ \varphi(x)\leqslant\tilde{\varphi}+C(\bar{f}-f^*),\ f(x)\geqslant f^*\}$. Обозначим $W_\lambda=\{x\colon\ x\in M,\ p(x,\lambda)\leqslant\lambda_1\tilde{\varphi}-\lambda_2 f^*\}$. Очевидно, $W_\lambda\neq\varnothing$ $\forall\lambda>0$. Нетрудно показать, что $W_\lambda\subset V$ $\forall\lambda>0$ и, следовательно, W_λ ограничено. Но $\inf\limits_{x\in M} p(x,\lambda)=\min\limits_{x\in W_\lambda} p(x,\lambda)$, поэтому для любого $\lambda\in\Lambda$ существует $x_\lambda=\arg\min\limits_{x\in M} p(x,\lambda)$.

3) Пусть векторы $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$ таковы, что $\beta(\lambda_2)\leqslant\beta(\lambda_1)$. Из неравенств $p(x_{\lambda_1},\lambda_1)\leqslant p(x_{\lambda_2},\lambda_1)$, $p(x_{\lambda_2}\lambda_2)\leqslant\leqslant p(x_{\lambda_1},\lambda_2)$ имеем

$$\begin{aligned}&\varphi(x_{\lambda_1})-\beta(\lambda_1)f(x_{\lambda_1})\leqslant\varphi(x_{\lambda_2})-\beta(\lambda_1)f(x_{\lambda_2}),\\&\varphi(x_{\lambda_1})-\beta(\lambda_2)f(x_{\lambda_1})\geqslant\varphi(x_{\lambda_2})-\beta(\lambda_2)f(x_{\lambda_2}).\end{aligned}\tag{27.5}$$

Вычитая из первого неравенства второе, получим $(\beta(\lambda_2)-\beta(\lambda_1))(f(x_{\lambda_1})-f(x_{\lambda_2}))\leqslant 0$, откуда

$$f(x_{\lambda_2})\leqslant f(x_{\lambda_1}).\tag{27.6}$$

Из соотношения (27.5) с учетом (27.6) также имеем

$$\varphi(x_{\lambda_2})\leqslant\varphi(x_{\lambda_1}).\tag{27.7}$$

Поскольку $x_\lambda\in V$ $\forall\lambda\in\Lambda$ и V ограничено, то существует последовательность $\{\lambda_k\}$ значений λ, для которой $\beta(\lambda_k)\searrow 0$, $x_{\lambda_k}\to x^*$ при $k\to\infty$, где $x^*\in V$. Из непрерывности $f(x)$ и $\varphi(x)$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{\lambda_k})=f(x^*)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_{\lambda_k})=\varphi(x^*)$. Последние равенства вместе с (27.6), (27.7) влекут, в свою очередь, выполнимость

$$\lim_{\beta(\lambda)\searrow 0} f(x_\lambda) = f(x^*), \quad \lim_{\beta(\lambda)\searrow 0} \varphi(x_\lambda) = \varphi(x^*).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $x^* \in X^*$. Требуемое соотношение вытекает из замкнутости M и неравенств $\varphi(x_\lambda) \leqslant \tilde{\varphi} + \beta(\lambda)(\bar{f} - f^*)$, $f(x_\lambda) \geqslant f^*$, справедливых для любого $\lambda \in \Lambda$. Теорема доказана.

Примерами функций $\varphi = \varphi(x)$, удовлетворяющих свойствам (27.3), могут служить $\varphi_1(x) = \beta \sum_{j=1}^{l} \alpha_j^{\delta_j} f_j^{+\delta_j}(x)$,

$$\varphi_2(x) = \beta l \max_{j \in \mathbf{N}_l} \left[\alpha_j f_j^+(x)\right]^{\delta_j},$$

$$\beta > 0, \quad \alpha_j \geqslant 1, \quad \delta_j > 0, \quad j \in \mathbf{N}_l.$$

Заметим, что если в задаче (27.2) $y_0 = -f(x)$ — равномерно выпуклая функция, то условие $f(x) \leqslant \bar{f} < +\infty$ $\forall x \in \mathbf{R}^n$ выполняется автоматически, и при этом $X^* = \{x^*\}$. Тогда при условии γ-ограниченности в задаче (27.2) справедливо соотношение $\lim\limits_{\beta(\lambda)\searrow 0} x_\lambda = x^*$.

Применение теоремы 27.1 для непосредственного численного анализа задачи (27.1) затруднено необходимостью точно вычислять значения функции $y = x_\lambda = \arg\min\{p(x, \lambda)\colon x \in M\}$. Пусть задача (27.4) решается приближенно, т. е. для каждого значения $\lambda = \lambda^k$ мы умеем находить $x = x^k \in M$, удовлетворяющий соотношению

$$|\, p(x^k, \lambda^k) - p(x_{\lambda^k}, \lambda^k)\,| < \xi_k, \tag{27.8}$$

где $\xi_k > 0$, $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 27.2. *Пусть выполнены условия теоремы 27.1 и последовательности* $\{\beta_k = \lambda_2^k/\lambda_1^k\}$, $\{\gamma_k = \xi_k/\lambda_2^k\}$ *сходятся к нулю. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} |\, x^k - X^* \,| = 0,$$

где точка x^k выбрана в соответствии с (27.8).

Доказательство. Из (27.8) имеем

$$p\left(x^k, \lambda^k\right) - \xi_k \leqslant p\left(x_{\lambda^k}, \lambda^k\right) \leqslant p\left(x^*, \lambda^k\right),$$

где $x^* \in X^*$. Отсюда

$$\varphi(x^k) \leqslant \tilde{\varphi} + \beta_k(\bar{f} - f^*) + \xi_k/\lambda_1^k, \tag{27.9}$$

$$f^* - f(x^k) \leqslant \xi_k/\lambda_2^k. \tag{27.10}$$

Так как $\xi_k/\lambda_1^k = \beta_k\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$ и множество $X^* = \{x : \varphi(x) \leqslant \tilde{\varphi},\ f(x) \geqslant f^*,\ x \in M\}$ ограничено, то ограничено и $X_0 = \{x : \varphi(x) \leqslant \tilde{\varphi} + \beta_0(\bar{f} - f^*) + \xi_0/\lambda_1^0,\ f(x) \geqslant f^* - \xi_0/\lambda_2^0,\ x \in M\}$. Поэтому из (27.9) и (27.10) вытекает, что последовательность $\{x^k\}$ ограничена и любая ее предельная точка лежит в X^*. Это равносильно утверждению теоремы. Теорема доказана.

Примером последовательностей λ_1^k, λ_2^k и ξ_k, удовлетворяющих предположениям теоремы 27.2, могут служить $\lambda_1^k = k^\sigma$, $\lambda_2^k = k^{\tau-1}$, $\xi_k = k^{-1}$ при $\sigma > 0$, $0 < \tau \leqslant 1$.

Рассмотрим другой тип условий, при которых имеет место эквивалентность задач (27.2) и (27.4).

Теорема 27.3. *Пусть задача* (27.2) *разрешима в точках множества* X^* *и для нее справедлива теорема Куна — Таккера. Тогда существует такое число* $\bar{\beta}$, *что при* $0 < \beta(\lambda) \leqslant \bar{\beta}$ *выполняются соотношения*

$$\inf_{x \in M} p(x, \lambda) = \lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^*, \quad X^* = \operatorname{Arg}\min_{x \in M} p(x, \lambda).$$

Доказательство. Пусть $x^* \in X^*$. По теореме Куна — Таккера можно найти число $u^* \geqslant 0$, при котором имеют место неравенства

$$F(x^*, u) \geqslant F(x^*, u^*) \geqslant F(x, u^*) \quad \forall x \in M, \quad \forall u \in \mathbf{R}_+^1,$$

где $F(x, u) = f(x) - u(\varphi(x) - \tilde{\varphi})$, $u \in \mathbf{R}_+^1$. Отсюда $x^* = \arg\max_{x \in M} F(x, u^*)$. Необходимое и достаточное условие выполнения равенства имеет вид:

$$(e^*, x - x^*) \geqslant 0 \quad \forall x \in M, \tag{27.11}$$

где $e^* \in \partial_x(-F(x^*, u^*))$. Согласно правилам субдифференцирования [72] $e^* = u^* e_1^* + e_2^*$, $e_1^* \in \partial\varphi(x^*)$, $e_2^* \in \partial(-f(x^*))$.

Пусть x' — произвольная точка множества M. Из определения субдифференциала выпуклой функции и соотношения (27.11) получим

$$p(x', \lambda) = \\ = \lambda_1\varphi(x') - \lambda_2 f(x') \geqslant \lambda_1\varphi(x') + \lambda_2\left(\overset{*}{e_2}, x' - x^*\right) - \\ - \lambda_2 f(x') \geqslant \lambda_1\varphi(x') - \lambda_2 u^*\left(\overset{*}{e_1}, x' - x^*\right) - \lambda_2 f^* \geqslant \\ \geqslant \lambda_1\varphi(x') - \lambda_2 u^*[\varphi(x') - \varphi(x^*)] - \lambda_2 f^* = \\ = (\lambda_1 - \lambda_2 u^*)\varphi(x') + \lambda_2 u^*\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^*. \qquad (27.12)$$

Положим $\beta(\lambda) = \lambda_2/\lambda_1 \leqslant \bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ — одно из решений неравенства $\beta u^* < 1$. Тогда $\lambda_1 - \lambda_2 u^* = \lambda_1(1 - \beta(\lambda)u^*) > 0$, и поэтому из (27.12) следует

$$p(x', \lambda) \geqslant (\lambda_1 - \lambda_2 u^*)\tilde{\varphi} + \lambda_2 u^*\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^* = \lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^*.$$

Так как x' — произвольная точка из M, то при $\beta(\lambda) \leqslant \bar{\beta}$

$$\inf\{p(x, \lambda): x \in M\} \geqslant \lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^*. \qquad (27.13)$$

С другой стороны, для любых $x^* \in X^*$ и $\lambda \in \mathbf{R}^2_+$ имеем $p(x^*, \lambda) = \lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^*$, что вместе с (27.13) дает

$$\inf_{x \in M} p(x, \lambda) = \lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^* \qquad (27.14)$$

и $X^* \subset \tilde{M}_\lambda = \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in M} p(x, \lambda)$.

Покажем обратное включение. Пусть $x_\lambda \in \tilde{M}_\lambda$ и $\beta(\lambda) \leqslant \leqslant \bar{\beta}$. Из соотношений (27.12) и (27.14) получим

$$\lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^* \geqslant (\lambda_1 - \lambda_2 u^*)\varphi(x_\lambda) + \lambda_2 u^*\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^*,$$

откуда $\varphi(x_\lambda) \leqslant \tilde{\varphi}$, а так как $x_\lambda \in M$, то и $\varphi(x_\lambda) = \tilde{\varphi}$. Тогда из (27.14) имеем $f(x_\lambda) = f^*$, т. е. $x_\lambda \in X^*$ и, следовательно, $\tilde{M}_\lambda \subset X^*$. Теорема доказана.

Условия теоремы 27.3 выполняются, например, в случае, когда $f_j(x)$ — аффинные функции, $\varphi(x) = \beta \sum\limits_{j=1}^{l} f_j^+(x)$, $\beta > 0$, M — ограниченное множество.

Рассмотрим вновь случай приближенного решения задачи (27.4). Для заданной последовательности $\lambda = \lambda^k$ определим точку $x^k \in M$ в соответствии с (27.8).

Теорема 27.4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и* $\beta_k = \lambda_2^k/\lambda_1^k$ *удовлетворяет при* $k \geqslant K$

требованию $\beta_k u^* \leqslant 1/2$. *Тогда для всех* $k \geqslant K$

$$|f(x^k) - f^*| \leqslant 2\xi_k/\lambda_2^k, \quad \varphi(x^k) - \tilde{\varphi} \leqslant 2\xi_k/\lambda_1^k. \qquad (27.15)$$

Доказательство. Применяя соотношения (27.12) при $\lambda = \lambda^k = [\lambda_1^k, \lambda_2^k]$ и $x' = x^k$, имеем

$$p(x^k, \lambda^k) \geqslant (\lambda_1^k - \lambda_2^k u^*)\,\varphi(x^k) + \lambda_2^k u^* \tilde{\varphi} - \lambda_2^k f^*.$$

С другой стороны, в силу (27.8) выполняется

$$p(x^k, \lambda^k) \leqslant p\left(x_{\lambda^k}, \lambda^k\right) + \xi_k \leqslant \lambda_1^k \tilde{\varphi} - \lambda_2^k f^* + \xi_k.$$

Отсюда

$$(\lambda_1^k - \lambda_2^k u^*)(\varphi(x^k) - \tilde{\varphi}) \leqslant \xi_k,$$

а поскольку при $k \geqslant K$ $\lambda_1^k - \lambda_2^k u^* \geqslant \frac{1}{2}\lambda_1^k$, то тем самым и доказана вторая из оценок (27.15).

Далее, из неравенства $p(x^k, \lambda^k) \leqslant \lambda_1^k \tilde{\varphi} - \lambda_2^k f^* + \xi_k$ вытекает

$$f^* - f(x^k) \leqslant \frac{\lambda_1^k}{\lambda_2^k}(\tilde{\varphi} - \varphi(x^k)) + \frac{\xi_k}{\lambda_2^k} \leqslant \frac{\xi_k}{\lambda_2^k}. \qquad (27.16)$$

Кроме того, из доказательства предыдущей теоремы следует, что при $k \geqslant K$ выполняется $\beta_k \leqslant \bar{\beta}$. Поэтому в силу (27.14)

$$p\left(x_{\lambda^k}, \lambda^k\right) = \lambda_1^k \tilde{\varphi} - \lambda_2^k f^* \leqslant p(x^k, \lambda^k),$$

откуда с применением оценки для $\varphi(x^k) - \tilde{\varphi}$ имеем

$$f(x^k) - f^* \leqslant \frac{\lambda_1^k}{\lambda_2^k}(\varphi(x^k) - \tilde{\varphi}) \leqslant \frac{2\xi_k}{\lambda_2^k},$$

что вместе с (27.16) и доказывает теорему.

В теоремах 27.3, 27.4 существенным является выполнение для задачи (27.3) теоремы Куна — Таккера. Для того, чтобы гарантировать применимость этой теоремы к задаче выпуклого программирования, от последней чаще всего требуют ее R- или R_0-*регулярности* [36]. Задача (27.2) этим условиям регулярности не удовлетворяет (исключая случай, когда $\varphi = \varphi(x)$ — кусочно-линейная функция). Для преодоления затруднений, связанных с отсутствием у задачи (27.2) свойств регулярности, можно использовать прием, идея которого изложена в [31].

Рассмотрим параметрическую задачу вида

$$\max\{f(x)\colon\ \varphi(x)\leqslant\tilde{\varphi}+\varepsilon,\quad x\in M\},\qquad 0<\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}. \tag{27.17}$$

Задача (27.17) для любого $\varepsilon>0$ удовлетворяет условию R_0-регулярности. Естественно ожидать также, что для достаточно малого ε ее решение является хорошим приближением для f^*.

Теорема 27.5. *Пусть задача* (27.2) *разрешима, ее оптимальное множество ограничено и* $f(x)\leqslant\bar{f}<+\infty$ $\forall x\in M$. *Предположим, что параметр* $\hat{\lambda}=[\lambda_1,\ \lambda_2]$ *из задачи* (27.4) *согласован с* ε *из* (27.17): $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, $\beta=\beta(\varepsilon)=\lambda_2(\varepsilon)/\lambda_1(\varepsilon)=\varepsilon/2$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varphi(x(\varepsilon))=\tilde{\varphi},\ \lim_{\varepsilon\to0}f(x(\varepsilon))=f^*,$$

где $x(\varepsilon)=\arg\min\limits_{x\in M}p(x,\lambda(\varepsilon))$.

Доказательство. Из непустоты и ограниченности множества X^* оптимальных решений задачи (27.2) вытекает разрешимость для любого $\varepsilon>0$ задачи (27.17) в некоторой точке x_ε с оптимальным значением f^ε. Нетрудно видеть, что при этом

$$\lim_{\varepsilon\to0}f^\varepsilon=f^*. \tag{27.18}$$

Так как задача (27.17) удовлетворяет условию R_0-регулярности, то по аналогии с (27.11) в силу теоремы Куна — Таккера имеем

$$\left(u^\varepsilon e_1^\varepsilon+e_2^\varepsilon,\ x-x_\varepsilon\right)\geqslant0\quad\forall x\in M, \tag{27.19}$$

$$u^\varepsilon(\varphi(x_\varepsilon)-\tilde{\varphi}-\varepsilon)=0, \tag{27.20}$$

где $e_1^\varepsilon\in\partial\varphi(x_\varepsilon)$, $e_2^\varepsilon\in\partial(-f(x_\varepsilon))$, $u^\varepsilon\leqslant0$.

Из выпуклости функций $-f(x)$, $\varphi(x)$ и соотношений (27.19), (27.20) легко вывести (см. также [31]) соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon u^\varepsilon=0. \tag{27.21}$$

Ограниченность X^* влечет ограниченность множества $V=\left\{x:\varphi(x)\leqslant\tilde{\varphi}+\frac{\varepsilon}{2}(\bar{f}-f^*),\ f(x)\geqslant f^*,\ x\in M\right\}$. Но $\inf\limits_{x\in M}p(x,\lambda(\varepsilon))=\min\limits_{x\in V}p(x,\lambda(\varepsilon))$, поэтому существует $x(\varepsilon)=\arg\min\limits_{x\in M}p(x,\lambda(\varepsilon))$.

Применяя выкладки, близкие к тем, которые привели к (27.12), получим

$$\lambda_1\tilde{\varphi} - \lambda_2 f^* \geqslant (\lambda_1 - \lambda_2 u^\varepsilon)\varphi(x(\varepsilon)) - \lambda_2 f^\varepsilon + \lambda_2 u^\varepsilon \tilde{\varphi},$$

откуда

$$\varepsilon(f^\varepsilon - f^*) \geqslant (2 - \varepsilon u^\varepsilon)[\varphi(x(\varepsilon)) - \tilde{\varphi}]. \qquad (27.22)$$

Ввиду (27.18), (27.21) будем считать, что $\bar{\varepsilon}$ выбрано так, чтобы при $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ выполнялось $f^\varepsilon - f^* \leqslant 1$, $\varepsilon u^\varepsilon \leqslant \leqslant 1$. Тогда из (27.22) имеем $\varphi(x(\varepsilon)) - \tilde{\varphi} \leqslant \varepsilon$, т. е. точка $x(\varepsilon)$ допустима в задаче (27.17). Следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi(x(\varepsilon)) = \tilde{\varphi}$ и $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} f(x(\varepsilon)) \leqslant f^*$. С другой стороны, неравенство $p(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)) \leqslant p(x^*, \lambda(\varepsilon))$ при $x^* \in X^*$ влечет $f^* \leqslant \underline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} f(x(\varepsilon))$, откуда с учетом доказанного выше следует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x(\varepsilon)) = f^*$. Теорема доказана.

Задача (27.4) является условно экстремальной задачей. Добавлением к $p(x, \lambda)$ дополнительного слагаемого можно решение (27.4) свести к задаче минимизации специальным образом подобранной функции на заданном «элементарном» множестве Q. Здесь задачу (27.4) мы рассматриваем как трехэтапную задачу последовательного программирования, понимая под первым этапом нахождение множества M. Положим

$$P(x, \Lambda) = p(x, \lambda) + \lambda_3\Omega(x),$$

где $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] > 0$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, $\Omega(x)$ — функция «штрафа» за нарушение ограничений, определяющих множество $\{x: f_j(x) \leqslant 0, j \in J_1\}$. Например, $\Omega(x)$ может иметь следующий вид: $\Omega(x) = \sigma(t(x))$, $t(x) = [t_1(x), \ldots \ldots, t_{m-l}(x)]$, $t_j(x) = f^+_{l+j}(x)$, $j \in \mathbf{N}_{m-l}$, $\sigma = \sigma(t)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbf{R}^{m-l}_+$ и удовлетворяющая соотношениям

$$\sigma(0) = 0, \quad \inf_{t:\|t\|_1 = 1} \frac{\partial\sigma(0)}{\partial t} = \nu > 0. \qquad (27.23)$$

Теорема 27.6. *Предположим, что для задачи* (27.1) *выполнено условие* $\bar{\gamma}$-*ограниченности*, $f(x) \leqslant \bar{f} < +\infty$ $\forall x \in Q$, *для задачи* (27.4) *имеет место условие* (R_0): $\exists x^0 \in Q: f_j(x^0) < 0$, $j \in J_1$. *Пусть последовательность положительных векторов* $\{\Lambda_k = [\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k]\}$ *такова, что*

$\left\{\beta(\Lambda_k)=\dfrac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}\right\}\searrow 0$, $\quad \lambda_3^k=\dfrac{\eta}{\nu}\lambda_1^k$, *где* ν — *из* (27.23), $\eta = \mathrm{const}$, $\eta\geqslant\eta_0=\dfrac{\varphi(x^0)+\beta(\Lambda_0)(\tilde{f}-f(x^0))}{\min\limits_{j\in J_1}|f_j(x^0)|}$. *Тогда для любого* Λ_k *задача*

$$\inf\{P(x,\ \Lambda_k):\ x\in Q\} \tag{27.24}$$

разрешима в некоторой точке x_{Λ_k}, *при этом*

$$\begin{gathered}\Omega(x_{\Lambda_k})=0\quad \forall k,\quad f(x_{\Lambda_k})\searrow f^*,\\ \varphi(x_{\Lambda_k})\searrow\tilde{\varphi},\quad |x_{\Lambda_k}-X^*|\to 0 \text{ при } k\to\infty.\end{gathered} \tag{27.25}$$

Доказательство. По теореме 27.1 для любого $\lambda>0$ существует x_λ — оптимальное решение задачи (27.4). Так как задача (27.4) удовлетворяет условию регулярности, то можно указать вектор $u_\lambda=\left[u_1^\lambda,\ \ldots,\ u_{m-l}^\lambda\right]\geqslant 0$ такой, что пара $(x_\lambda,\ u_\lambda)$ будет седловой точкой функции $L_\lambda(x,\ u)=p(x,\ \lambda)+\sum\limits_{j\in J_1}u_jf_j(x)$ в области $Q\times\mathbf{R}_+^{m-l}$. Поэтому справедливо неравенство $L_\lambda(x_\lambda,\ u_\lambda)\leqslant L_\lambda(x^0,\ u_\lambda)$, откуда

$$0\leqslant u_j^\lambda\leqslant\frac{p(x^0,\ \lambda)-p(x_\lambda,\ \lambda)}{|f_j(x^0)|}\leqslant\lambda_1\frac{\varphi(x^0)+\beta(\Lambda)(\tilde{f}-f(x^0))}{|f_j(x^0)|}. \tag{27.26}$$

Выберем последовательность $\{\Lambda_k\}$ в соответствии с условиями теоремы. В силу (27.26) выполняется $\dfrac{1}{\nu}\max\limits_{j\in J_1}u_j^{\lambda_k}<\lambda_3^k$ для любого $k\geqslant 1$, где $\lambda_k=\left[\lambda_1^k,\ \lambda_2^k\right]$. Тогда согласно теореме 1 из [75] задача (27.24) разрешима для любого Λ_k и имеет место совпадение оптимальных множеств задач (27.4) и (27.24). Поэтому оптимальное решение задачи (27.24) лежит в M и, следовательно, $\Omega(x_{\Lambda_k})=0$. Справедливость остальных утверждений в (27.25) вытекает из теоремы 27.1. Теорема доказана.

Приведем примеры функций $\sigma=\sigma(t)$, удовлетворяющих условиям (27.23):

1) $\sigma(t)=\sum\limits_{j\in J_1}\left(b_j^{t_j}-1\right)$, $\quad b_j>1$, $\quad j\in J_1$;

2) $\sigma(t)=\sum\limits_{j\in J_1}\mu_jt_j\psi_j(t_j)$, где $\mu_j>1$,

$\psi(x)$ — выпуклые неубывающие функции, определенные на $\mathbf{R}^1_+$ такие, что $\psi_j(0) > 0$, $j \in J_1$;

3) $\sigma(t) = \max\limits_{j \in J_1}(\mu_j t_j)$, $\mu_j > 0$, $j \in J_1$.

В теореме 27.6 можно отказаться от требования R_0-регулярности задачи (27.4), рассматривая вместо M множество $M^\varepsilon = \{x\colon f_j(x) \leqslant \varepsilon \quad \forall j \in J_1, \quad x \in Q\}$, $\varepsilon > 0$. В задаче (27.24) возможно также применение функций штрафа $\Omega(x)$ со свойствами, отличными от (27.23) (см. [75]).

§ 28. Методы итеративной коррекции несобственных задач ВП 1-го рода

Для несобственной задачи ВП 1-го рода построим метод итеративной аппроксимации, основанный на использовании одной модификации функции Лагранжа. Материал является естественным продолжением § 14.

28.1. Предварительные результаты. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, конечная и непрерывная на непустом замкнутом выпуклом множестве M, $M \subset \mathbf{R}^n$. Для удобства продолжим $f(x)$ на все $\mathbf{R}^n$, полагая $f(x) = +\infty$ при всех $x \notin M$. Доопределенная таким образом функция $f(x)$ в терминологии работы [72] является собственной замкнутой (полунепрерывной снизу) на $\mathbf{R}^n$ выпуклой функцией, эффективная область которой $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbf{R}^n\colon f(x) < +\infty\}$ совпадает с M.

Свяжем с функцией $f(x)$ множество

$$U = \{u\colon -f^*(u) = \inf(f(x) - (u, x)) > -\infty\},$$

где $f^*(x)$ — функция, сопряженная к $f(x)$ [72]. Пусть

$$\inf f(x) = -f^*(0) = -\infty. \tag{28.1}$$

В предположении (28.1) имеем: $0 \notin U$. Выделим в $\overline{U}$ минимальный по норме элемент, который будем обозначать через $\tilde{u}$ и называть *линейной частью* функции $f(x)$. Введем также функцию $\tilde{f}(x) = f(x) - (\tilde{u}, x)$, которую будем называть *регулярной частью* функции $f(x)$.

Установим ряд свойств вектора $\tilde{u}$. Пусть

$$M(\alpha) = \{x\colon f(x) \leqslant \alpha\}, \quad \tilde{M}(\alpha) = \{x\colon \tilde{f}(x) \leqslant \alpha\}.$$

Лемма 28.1. *Все непустые множества $\tilde{M}(\alpha)$ удовлетворяют включению*

$$\tilde{M}(\alpha) - \tilde{u} \subset \tilde{M}(\alpha).$$

Доказательство. Вектор $\tilde{u}$, как проекция нуля на выпуклое множество $\bar{U}$, удовлетворяет неравенству $(\tilde{u},\ u-\tilde{u})\geqslant 0$ при всех $u\in U$. Поэтому вектор $-\tilde{u}$ принадлежит поляре конуса, порожденного $\operatorname{dom}\tilde{f}^*=U-\tilde{u}$. Последняя совпадает с рецессивным конусом функции $\tilde{f}(x)$ (см. [72, с. 139, теорема 14.2]). Следовательно (см. [72, с. 86, теорема 8.7]), $-\tilde{u}$ принадлежит общему рецессивному конусу непустых множеств $\tilde{M}(\alpha)$.

Следствие 28.1. *Все множества* $M(\alpha)$, *не пустые в предположении* (28.1), *удовлетворяют включению*

$$M(\alpha)-\tilde{u}\subset M(\alpha).$$

Таким образом, $-\tilde{u}$ определяет направление неограниченного (в предположении (28.1)) убывания $f(x)$. Покажем, что $\gamma=\|\tilde{u}\|$ определяет наибольшую «скорость» такого убывания.

Лемма 28.2. *Число* $\gamma=\|\tilde{u}\|$ *есть наименьшее из неотрицательных чисел, для которых*

$$\left(\lim_{t\to\infty}\|x_t\|=+\infty\right)\Rightarrow\left(\varliminf_{t\to\infty} f(x_t)\,\|x_t\|^{-1}\geqslant-\gamma\right).\qquad(28.2)$$

Доказательство. Обозначим через Γ множество всех чисел, удовлетворяющих (28.2). То, что $\gamma=\|\tilde{u}\|\in\Gamma$, следует из очевидной замкнутости Γ и определения сопряженной функции, согласно которому $f(x)\geqslant(u,\ x)-f^*(u)$ при всех x. Покажем минимальность $\gamma=\|\tilde{u}\|$ в $\Gamma_+=\Gamma\cap\mathbf{R}_+$. Случай $\tilde{u}=0$ отбросим как тривиальный. Пусть $x_t=x-t\tilde{u}$ при всех $t\in\mathbf{N}$ (x — произвольная точка M). Поскольку $\tilde{u}\neq 0$, то последовательность $\{x_t\}$ не ограничена. Вместе с тем, согласно лемме 28.1

$$f(x_t)=\tilde{f}(x_t)+(\tilde{u},\ x_t)\leqslant\tilde{f}(x)+(\tilde{u},\ x)-t\|\tilde{u}\|^2.$$

Отсюда для любого $0\leqslant\gamma<\|\tilde{u}\|$ имеем неравенство

$$\varlimsup_{t\to\infty} f(x_t)\,\|x_t\|^{-1}\leqslant-\|\tilde{u}\|<-\gamma,$$

которое противоречит (28.2). Поэтому $\gamma\notin\Gamma_+$. Лемма доказана.

Следствие 28.2. *В предположении* (28.1) $\gamma=\|\tilde{u}\|$ *есть наименьшее из чисел, удовлетворяющих условию* (28.2).

Это утверждение вытекает из того, что в предположении (28.1) $\Gamma=\Gamma_+$.

Следствие 28.3. *Регулярная часть функции $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\left(\lim_{t\to\infty}\|x_t\| = +\infty\right) \Rightarrow \left(\varliminf_{t\to\infty} \tilde{f}(x_t)\|x_t\|^{-1} \geqslant 0\right).$$

Отметим, что приведенные утверждения тривиальны в случае, когда $-f^*(0) = \inf f(x) > -\infty$, следовательно, $\tilde{u} = 0$.

Перейдем к вопросу нахождения вектора $\tilde{u}$. Наряду с $f(x)$ рассмотрим параметрическое семейство функций

$$f_\tau(x) = f(x) + \tau\|x\|^2, \qquad \tau > 0,$$

(регуляризованных по Тихонову [80, 82]). Поскольку $f_\tau(x)$ при любом $\tau > 0$ является сильно выпуклой и непрерывной на M функцией, то $\inf f_\tau(x) > -\infty$, причем точная нижняя грань достигается в единственной точке x_τ.

Лемма 28.3. *При сделанных предположениях векторы x_τ обладают следующими свойствами:*

a) $-2\tau x_\tau \in U$;

b) $x_\tau \in \operatorname{Arg\,min}\{f(x) + 2\tau(x_\tau, x)\}$;

c) $\lim\limits_{\tau\to+0} 2\tau x_\tau = -\tilde{u}$.

Если, кроме того, $\tilde{u} \in \operatorname{dom} f^* = U$, то

d) $\lim\limits_{\tau\to+0} (f(x_\tau) - (\tilde{u}, x_\tau)) = -f^*(\tilde{u})$.

Доказательство. Поскольку $x_\tau = \arg\min f_\tau(x)$, то (см. [72, с. 239, теорема 23.8])

$$0 \in \partial f_\tau(x_\tau) = \partial f(x_\tau) + 2\tau x_\tau. \qquad (28.3)$$

Отсюда немедленно следует справедливость пунктов *a)* и *b)*.

Покажем справедливость пункта *c)*. С этой целью зададимся произвольным $\varepsilon > 0$, для которого выберем из $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f^*)$ — относительной внутренности эффективной области функции $f^*(u)$ — такое u_ε, что $\|\tilde{u} - u_\varepsilon\| < \varepsilon$. Такой выбор возможен (см. [72, с. 60, теорема 6.1]). Поскольку $u_\varepsilon \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom} f^*)$, то (см. [72, с. 235, теорема 23.5]) существует такое x_ε, что $f^*(u_\varepsilon) = (u_\varepsilon, x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)$.

По определению сопряженной функции $f(x_\tau) \geqslant -f^*(u_\varepsilon) + (u_\varepsilon, x_\tau)$. С другой стороны, в силу (28.3) $f(x_\tau) \leqslant f(x_\varepsilon) - 2\tau(x_\tau, x_\tau - x_\varepsilon)$. Комбинируя эти два неравенства, после несложных преобразований получим:

$$2\tau\|x_\tau\|^2 - \|x_\tau\| \cdot \|u_\varepsilon\| \leqslant \|x_\varepsilon\| \cdot \|u_\varepsilon\| + 2\tau\|x_\tau\| \cdot \|x_\varepsilon\|.$$

Это соотношение, умноженное на $2\tau > 0$, обращается в квадратичное неравенство относительно $\lambda = 2\tau\|x_\tau\|$:

$$\lambda^2 - \lambda(\|u_\varepsilon\| + 2\tau\|x_\varepsilon\|) - 2\tau\|x_\varepsilon\| \cdot \|u_\varepsilon\| \leqslant 0.$$

Из этого неравенства следует

$$\lambda = 2\tau\|x_\tau\| \leqslant \|u_\varepsilon\| + 2\tau\|x_\varepsilon\| + (2\tau\|x_\varepsilon\| \cdot \|u_\varepsilon\|)^{1/2}.$$

Ввиду уже доказанных пунктов *a*) и *b*) и произвольности $\varepsilon > 0$ полученная оценка подтверждает справедливость пункта *c*).

Осталось установить справедливость пункта *d*). Поскольку, очевидно, $f(x_\tau) - (\tilde{u}, x_\tau) \geqslant -f^*(\tilde{u})$, то достаточно показать, что

$$\varlimsup_{\tau \to +0} (f(x_\tau) - (\tilde{u}, x_\tau)) \leqslant -f^*(\tilde{u}). \tag{28.4}$$

По определению сопряженной функции для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое x_ε, что $f^*(\tilde{u}) \leqslant (\tilde{u}, x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon) + \varepsilon$. Поэтому из (28.4) и пункта *a*) следует

$$\begin{aligned} f(x_\tau) - (\tilde{u}, x_\tau) + f^*(\tilde{u}) \leqslant (\tilde{u}, x_\varepsilon) + \varepsilon - (\tilde{u}, x_\tau) + \\ + f(x_\tau) - f(x_\varepsilon) \leqslant (\tilde{u}, x_\varepsilon) + \varepsilon - (\tilde{u}, x_\tau) - 2\tau(x_\tau, x_\tau - x_\varepsilon) = \\ = (x_\varepsilon, \tilde{u} + 2\tau x_\tau) + \varepsilon - (x_\tau, \tilde{u} + 2\tau x_\tau). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое здесь неотрицательно (свойство проекции на выпуклое множество). Поэтому при предельном переходе (по $\tau \to +0$) с учетом произвольности $\varepsilon > 0$ и пункта *c*) получим (28.4). Лемма доказана.

Пусть теперь $f(x)$ конечна всюду на $\mathbf{R}^n$, дифференцируема и ее градиент $\nabla f(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Пусть, кроме того, $\tilde{u} \in \operatorname{dom} f^*$ (т. е. $f^*(\tilde{u}) < \infty$).

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad x_{t+1} = x_t - \alpha_t(\widetilde{\nabla f}(x_t) + \delta_t), \quad t = 0, 1, \ldots \tag{28.5}$$

Этот процесс представляет собой градиентную процедуру минимизации $f(x)$.

Лемма 28.4. *При сделанных предположениях относительно* $f(x)$ *имеем*

$$a)\ \lim_{t\to\infty}\tilde{f}(x_t) = -f^*(\tilde{u}) > -\infty,$$

$$b)\ \sum_{t=0}^{\infty}\|\tilde{u} - \nabla f(x_t) - \delta_t\|^2 = \mathscr{H} < +\infty,$$

если только параметры в (28.5) *подчинены условиям*

$$0 < \alpha \leqslant \alpha_t \leqslant \bar{\alpha} < 2L^{-1}, \quad \sum_{t=0}^{\infty}\|\delta_t\| = \mathscr{E} < +\infty.$$

Доказательство. Из исходных предположений следует, что регулярная часть функции $f(x)$ также всюду конечна, дифференцируема, а ее градиент $\nabla\tilde{f}(x)$ удовлетворяет на $\mathbf{R}^n$ условию Липшица с той же константой L. Поэтому

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_0^1 \left(\nabla\tilde{f}(y - \theta(x-y)), x-y\right) d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \left(\nabla\tilde{f}(y), x-y\right) + \frac{1}{2}L\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\tilde{f}(x_t - \alpha_t(\nabla\tilde{f}(x_t) + \delta_t)) \leqslant \tilde{f}(x_t) + \frac{1}{2}\|\delta_t\| -$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_t(2 - \alpha_t L - \alpha_t\|\delta_t\|)\|\nabla\tilde{f}(x_t) + \delta_t\|^2. \qquad (28.6)$$

Кроме этого, из (28.5) согласно лемме 28.1 имеем

$$\bar{f}(x_{t+1}) \leqslant \bar{f}(x_t - \alpha_t(\nabla\tilde{f}(x_t) + \delta_t)). \qquad (28.7)$$

Складывая неравенства типа (28.6), (28.7) при t, меняющемся от θ до T, где T и θ произвольны, $T > \theta$, получим:

$$\tilde{f}(x_{T+1}) \leqslant \tilde{f}(x_\theta) + \frac{1}{2}\sum_{t=\theta}^{T}\|\delta_t\| -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=\theta}^{T}\alpha_t(2 - \alpha_t L - \alpha_t\|\delta_t\|)\|\nabla\tilde{f}(x_t) + \delta_t\|^2. \qquad (28.8)$$

Следствием этой оценки и исходных предположений является, очевидно, существование $\nu = \lim_{t\to\infty}\tilde{f}(x_t) \geqslant -f^*(\tilde{u})$, а также конечность суммы $\mathscr{H} = \sum_{t=0}^{\infty}\|\nabla\tilde{f}(x_t) + \delta_t\|^2$.

Покажем, что $\nu = -f^*(\tilde{u})$. Пусть, напротив, при некоторых $\varepsilon > 0$, $\theta \in \mathbf{N}$

$$x_t \notin U(\varepsilon) \quad \forall t \geqslant \theta, \tag{28.9}$$

где $U(\varepsilon) = \{x\colon \tilde{f}(x) < -f^*(\tilde{u}) + \varepsilon\}$. В силу исходных предположений θ можно считать столь большим, что

$$1 - \sum_{t=\theta}^{\infty} \alpha_t \|\delta_t\| = \gamma > 0. \tag{28.10}$$

Определим вспомогательную последовательность $\{y_t\}_{t \geqslant \theta}$ по правилу:

$$y_\theta \in U(\sigma), \quad y_{t+1} = y_t - \alpha_t \tilde{u}, \quad t = \theta, \theta + 1, \ldots;$$

здесь $0 < \sigma < \varepsilon$. Согласно лемме 28.1 $\{y_t\}$ целиком лежит в $U(\sigma)$. Поэтому из (28.5), (28.9) следует

$$\begin{aligned} \|x_{t+1} - y_{t+1}\|^2 = \|x_t - y_t\|^2 + \alpha_t^2 \|\nabla \tilde{f}(x_t) + \delta_t\|^2 - \\ - 2\alpha_t(\nabla \tilde{f}(x_t) + \delta_t, x_t - x_t) \leqslant \|x_t - y_t\|^2 + \\ + \alpha_t \|\delta_t\| (1 + \|x_t - y_t\|^2) + \alpha_t^2 \|\nabla \tilde{f}(x_t) + \delta_t\|^2. \end{aligned} \tag{28.11}$$

Введем величину $V(T) = \max\limits_{\theta < t \leqslant T} \|x_t - y_t\|^2$. Складывая соотношения типа (28.11) при t, меняющемся от θ до $\tau - 1$, где τ определяется из условия $\|x_\tau - y_\tau\|^2 = V(T)$, $\theta < \tau \leqslant T$, получим

$$V(T) \leqslant \|x_\theta - y_\theta\|^2 + \bar{\alpha}\mathscr{E} + \bar{\alpha}^2\mathscr{H} + V(T) \sum_{t=\theta}^{\infty} \alpha_t \|\delta_t\|.$$

Отсюда ввиду (28.10)

$$V(T) \leqslant \gamma^{-1}(\|x_\theta - y_\theta\|^2 + \bar{\alpha}\mathscr{E} + \bar{\alpha}^2\mathscr{H}).$$

Поэтому, очевидно, $\tilde{V} = \sup\limits_T V(T) < +\infty$, и

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \lim_{t\to\infty} (\tilde{f}(x_t) - \sigma + f^*(\tilde{u})) \leqslant \lim_{t\to\infty} (\tilde{f}(x_t) - \tilde{f}(y_t)) \leqslant \\ \leqslant \tilde{V}^{1/2} \lim_{t\to\infty} \|\nabla \tilde{f}(x_t)\| = 0. \end{aligned}$$

Полученное соотношение противоречит допущению (28.9). Следовательно, $\nu = -f^*(\tilde{u})$.

28.2. Постановка задачи и описание метода. В качестве исходной рассмотрим задачу ВП

$$\sup\{f_0(x) : f_j(x) \leqslant b_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \ x \in G\}; \tag{28.12}$$

здесь G — выпуклое (не обязательно замкнутое) множество из $\mathbf{R}^n$, функции $-f_0(x)$, $f_j(x)$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$ конечны и выпуклы на G, $b = [b_1, \ldots, b_m]$ — набор вещественных чисел.

Не предполагая совместности или несовместности системы ограничений в (28.12), ограничимся допущением

$$M^* = \left\{u \geqslant 0\colon \sup_{x \in G} F(x, u) < +\infty\right\} \neq \varnothing, \tag{28.13}$$

где $F(x, u) = f_0(x) - (u, f(x) - b)$ — функция Лагранжа задачи (28.12), $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$.

Погрузим исходную задачу в параметрическое семейство задач ВП вида

$$\sup\{f_0(x)\colon f_j(x) \leqslant b_j + \Delta b_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m,\ x \in G\},$$

где параметром служит $\Delta b = [\Delta b_1, \ldots, \Delta b_m]$. При условии (28.13) функция оптимума $v(\Delta b)$ этой задачи будет, очевидно, собственной (в смысле [72]) вогнутой функцией аргумента Δb. Ее эффективная область $\operatorname{dom} v = \{\Delta b\colon v(\Delta b) > -\infty\}$ будет совпадать с

$$K_b = \{\Delta b\colon \{x \in G\colon f_j(x) \leqslant b_j + \Delta b_j \ \forall j \in \mathbf{N}_m\} \neq \varnothing\}.$$

Выделим в $\overline{K}_b$ минимальный по норме элемент, который обозначим через $\widetilde{\Delta b}$. Конечно, $\widetilde{\Delta b}$ может и не принадлежать K_b. Построим в $\mathbf{R}^m$ такую последовательность векторов $\{\varepsilon_t\}$, что $0 < \varepsilon_t < \varepsilon_{t-1}$ при всех $t \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon_t = 0$. Очевидно, что $\widetilde{\Delta b} + \varepsilon_t \in K_b$ при всех $t \in \mathbf{N}$. Будем предполагать

$$\lim_{t\to\infty} v(\widetilde{\Delta b} + \varepsilon_t) = \tilde{v} > -\infty. \tag{28.14}$$

Это условие эквивалентно условию конечности обобщенного оптимального значения задачи

$$\sup\{f_0(x)\colon f_j(x) \leqslant b_j + \widetilde{\Delta b}_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m,\ x \in G\}, \tag{28.15}$$

которое совпадает с $\tilde{v}$ (см. [36, с. 100, лемма 20.1]).

Соотнесем, далее, с задачей (28.12) модифицированную функцию Лагранжа вида

$$F_\mu(x, u) = f_0(x) - \inf_{z \geqslant 0}\{(u, f(x) - b + z) + \mu(f(x) - b + z)\},$$

где вспомогательная функция $\mu(u)$ выпукла, конечна и дифференцируема на $\mathbf{R}^m$, причем

$$\mu(0)=0, \quad \nabla\mu(0)=0,$$

$$\exists L>0 \quad \forall x, y\in\mathbf{R}^m \quad \|\nabla\mu(x)-\nabla\mu(y)\|\geqslant L^{-1}\|x-y\|.$$

Отметим, что в силу свойств функции $\mu(u)$ точная нижняя грань в определении $F_\mu(x, u)$ достигается в единственной точке $z(x, u)\geqslant 0$, откуда, в частности, следуют тождества:

$$\nabla_u F_\mu(x, u) = -f(x)+b-z(x, u), \tag{28.16}$$

$$F_\mu(x, u)=f_0(x)+(u, \nabla_u F_\mu(x, u))-\mu(-\nabla_u F_\mu(x, u)). \tag{28.17}$$

На основе использования функций $F_\mu(x, u)$ построим следующий итерационный процесс:

$$u_0\in\mathbf{R}^m, \quad x_t\in G, \quad F_\mu(x_t, u_t)\geqslant\sup_{x\in G} F_\mu(x, u_t)-\delta_t, \tag{28.18}$$

$$u_{t+1}=u_t-\alpha_t\nabla_u F_\mu(x_t, u_t), \quad t=0, 1, \ldots$$

Этот процесс представляет собою градиентную процедуру минимизации выпуклой функции $W_\mu(u)=\sup\limits_{x\in G} F_\mu(x, u)$ (см. [107]). Эта функция в предположении (28.13) всюду конечна, дифференцируема, и ее градиент $\nabla W_\mu(u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, что следует из свойств функции $\mu(u)$ [107].

28.3. Условия сходимости. Далее понадобится

Лемма 28.5. *Линейная часть выпуклой функции $W_\mu(u)$, собственной в предположении* (28.13), *совпадает с $-\widetilde{\Delta b}$. Если, кроме того, выполнено условие* (28.14), *то $-\widetilde{\Delta b}\in\operatorname{dom}W_\mu^*$, $W_\mu^*(-\widetilde{\Delta b})=\mu(\widetilde{\Delta b})-\tilde{v}$, где $W_\mu^*(p)$ — функция, сопряженная к $W_\mu(u)$.*

Доказательство. Для удобства введем функцию $\bar F_\mu(x, u, z)=f_0(x)-(u, f(x)-b+z)-\mu(f(x)-b+z)$ и множества $\mathscr{H}(p)=\{[x, z]: f(x)-b+z=p, z\geqslant 0, x\in G\}$. Представим функцию $W_\mu(u)$ в виде

$$W_\mu(u)=\sup_p \sup_{[x,z]\in\mathscr{H}(p)} \bar F_\mu(x, u, z)=$$

$$=\sup_p\{v(p)-(u, p)-\mu(p)\}. \tag{28.19}$$

Уточним, что здесь функция оптимума $v(p)$ может быть заменена своим замыканием $\bar v(p)$ (см. [72]), т. к. для всякого p существует такая последовательность $\{p_t\}$, что $\bar v(p)\leqslant\varlimsup\limits_{t\to\infty} v(p_t)$ и, вместе с тем, $\bar v(p)\geqslant v(p)$. В результате указанной замены точная верхняя грань в (28.19) будет достигаться, притом в единственной точке $p(u)$. Поэтому, в частности, $\nabla W_\mu(u) = -p(u)$, и верно тождество

$$W_\mu(u) = \bar{v}(-\nabla W_\mu(u)) + (u, \nabla W_\mu(u)) - \mu(-\nabla W_\mu(u)). \quad (28.20)$$

Вернемся к (28.19). Нетрудно видеть, что $W_\mu(u)$ есть функция, сопряженная к $\mu(-p) - v(-p)$. Поэтому (см. [72, с. 120, теорема 12.2]) функция $W_\mu^*(p)$, сопряженная к $W_\mu(u)$, совпадает с $\mu(-p) - \bar{v}(-p)$. Но эффективная область последней совпадает с $-\operatorname{dom}\bar{v}$; поэтому ввиду $\overline{K_b} = \overline{\operatorname{dom}\bar{v}}$ имеем совпадение линейной части функции $W_\mu(u)$ с $-\widetilde{\Delta b}$, а в случае, когда $\bar{v}(\widetilde{\Delta b}) > -\infty$, еще и равенство $W_\mu^*(-\widetilde{\Delta b}) = \mu(\widetilde{\Delta b}) - \tilde{v}$.

Теперь сформулируем для процесса (28.18) теорему сходимости.

Теорема 28.1. *Пусть выполнены предположения* (28.13), (28.14). *Если в соотношениях* (28.18) *параметры подчинены условиям*

$$0 < \underline{\alpha} \leqslant \alpha_t \leqslant \bar{\alpha} < 2L^{-1} \quad \forall t \in \mathbf{N}; \quad (28.21)$$

$$\{\delta_t \geqslant 0\}, \quad \sum_t \delta_t^{1/2} < +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \delta_t \|u_t\|^2 = 0, \quad (28.22)$$

то формируемая последовательность $\{[x_t, u_t]\}$ *обладает свойствами*:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} f_0(x_t) = \tilde{v}$;

b) $\lim\limits_{t\to\infty} \left(f_j(x_t) - b_j - \widetilde{\Delta b}_j\right)^+ = 0 \quad \forall j \in \mathbf{N}_m$;

c) $\lim\limits_{t\to\infty} W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}\left(u_t + \nabla\mu(\widetilde{\Delta b})\right) = \tilde{v}$,

где $W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)$ *есть функция типа* $W_\mu(u)$, *построенная для задачи* (28.15).

Доказательство. В предположениях теоремы существует такое число C, что (см. [107])

$$(x \in G,\ F_\mu(x, u) \geqslant W_\mu(u) - \varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\|\nabla_u F_\mu(x, u) - \nabla W_\mu(u)\| \leqslant C\varepsilon^{1/2}) \quad (28.23)$$

при всех u. Из этого утверждения и леммы 28.5 следует, что исследуемый процесс удовлетворяет всем исходным предположениям леммы 28.4 (здесь, очевидно, роль полунепрерывной снизу выпуклой функции $f(x)$ играет функция $W_\mu(u)$). Согласно лемме 28.4

$$\lim_{t\to\infty}\left(W_\mu(u_t)+(\widetilde{\Delta b},\, u_t)\right)=-W_\mu^*(-\widetilde{\Delta b}), \tag{28.24}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty}\|\nabla_u F_\mu(x_t,\, u_t)+\widetilde{\Delta b}\|^2=\mathscr{H}<+\infty. \tag{28.25}$$

Рассматривая второе из этих соотношений, заключаем в силу (28.22), (28.23), что

$$\lim_{t\to\infty}\nabla_u F_\mu(x_t,\, u_t)=\lim_{t\to\infty}\nabla W_\mu(u_t)=-\widetilde{\Delta b}. \tag{28.26}$$

Отсюда ввиду формулы (28.16) немедленно следует справедливость пункта b).

Далее, представим $W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)$ в виде, аналогичном (28.19): $W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)=\sup\limits_p\{\bar v(p)-(u,\, p-\widetilde{\Delta b})-\mu(p-\widetilde{\Delta b})\}$.

Точная верхняя грань здесь достигается, притом на единственном элементе $q(u)$. Поэтому $\nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)=-q(u)+\widetilde{\Delta b}$, и

$$W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)=\bar v(\widetilde{\Delta b}-\nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u))+(u,\, \nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u))-\\ -\mu(-\nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)). \tag{28.27}$$

Кроме того, $\nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)$ удовлетворяет (как и $\nabla W_\mu(u)$) условию Липшица с константой L.

Построим последовательность $\{z_t\}$ по следующему правилу:

$$z_t=u_t+\nabla\mu(-\nabla W_\mu(u_t))-\nabla\mu(-\nabla W_\mu(u_t)-\widetilde{\Delta b}). \tag{28.28}$$

Применяя правила субдифференцирования ([72, с. 239, теорема 23.8]), легко проверить справедливость включения

$$0\in\partial\{\bar v(p)-(z_t,\, p-\widetilde{\Delta b})-\mu(p-\widetilde{\Delta b})\}_{p=-\nabla W_\mu(u_t)}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(z_t)=\nabla W_\mu(u_t)+\widetilde{\Delta b}\quad \forall t\in\mathbf{N}. \tag{28.29}$$

Подставив это выражение, а также выражение (28.28) для z_t в формулу (28.27) и учитывая тождество (28.20), получим соотношение:

$$W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(z_t) = W_\mu(u_t) + (\widetilde{\Delta b}, u_t) + \mu(-\nabla W_\mu(u_t)) -$$
$$- \mu(-\nabla W_\mu(u_t) - \widetilde{\Delta b}) - (\nabla\mu(-\nabla W_\mu(u_t) - \widetilde{\Delta b}) -$$
$$- \nabla\mu(-\nabla W_\mu(u_t)), \quad \nabla W_\mu(u_t) + \widetilde{\Delta b}).$$

Переходя здесь к пределу (по $t \to \infty$), получим с учетом леммы 28.5, соотношений (28.24), (28.26) и свойств функции $\mu(u)$ следующее равенство: $\lim\limits_{t\to\infty} W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(z_t) = \tilde{v}$. Но поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} \|z_t - u_t - \nabla\mu(\widetilde{\Delta b})\| = 0$ (см. (28.28)), то отсюда с учетом липшицевости градиента $\nabla W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u)$ и равенства (28.29) имеем: $\lim\limits_{t\to\infty} W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u_t + \nabla\mu(\widetilde{\Delta b})) = \tilde{v}$, что и означает справедливость пункта c).

Осталось установить справедливость пункта a). Для этого в неравенство $F_\mu(x_t, u_t) \geqslant W_\mu(u_t) - \delta_t$ (см. (28.18)) подставим формулы (28.17) и (28.20). После очевидных преобразований получим

$$f_0(x_t) \geqslant \bar{v}(-\nabla W_\mu(u_t)) + (u_t, \nabla W_\mu(u_t) - \nabla_u F_\mu(x_t, u_t)) +$$
$$+ \mu(-\nabla_u F_\mu(x_t, u_t)) - \mu(-\nabla W_\mu(u_t)) - \delta_t.$$

Отсюда и из (28.22), (28.23)

$$f_0(x_t) \geqslant \bar{v}(-\nabla W_\mu(u_t)) - C\delta_t^{1/2}\|u_t\| +$$
$$+ \mu(-\nabla_u F_\mu(x_t, u_t)) - \mu(-\nabla W_\mu(u_t)) - \delta_t.$$

Переходя в этом соотношении к пределу (по $t \to \infty$), получим ввиду (27.22), (28.26) и свойств функции $\mu(u)$ следующее неравенство: $\varliminf\limits_{t\to\infty} f_0(x_t) \geqslant \tilde{v}$. Так как обратное неравенство есть следствие уже доказанного пункта b) и определения величины $\tilde{v} = \bar{v}(\widetilde{\Delta b})$, то тем самым справедливость пункта a) установлена. Теорема полностью доказана.

Следствие 28.4. *Пусть* $\mu(u) = \frac{1}{2L}\|u\|^2$. *Тогда процесс* (28.18) *при условиях* (28.13), (28.14), (28.21), (28.22) *и дополнительном условии постоянности параметра* $\alpha_t = 1/L$ $\forall t \in \mathbf{N}$ *обладает свойствами a) и b) из теоремы* 28.1 *и, кроме того, свойством*

c') $\lim\limits_{t\to\infty} W_{\mu,\widetilde{\Delta b}}(u_t) = \tilde{v}$.

Утверждение следствия вытекает из того, что при сделанных предположениях $\lim\limits_{t\to\infty}\|u_{t+1}-u_t-\nabla\mu(\widetilde{\Delta b})\|=0$. В общем случае свойство c') может и не иметь места.

Сделаем замечание к предположению (28.13). В общем случае добиться его выполнения можно, например, путем регуляризации исходной задачи (28.12). Регуляризованная задача

$$\sup\{f_0(x)-\tau\|x\|^2\colon\ f_j(x)\leqslant b_j\quad \forall j\in \mathrm{N}_m,\ x\in G\},\qquad (28.30)$$

где $\tau>0$, либо имеет конечное оптимальное значение, либо имеет пустую допустимую область. Предположим для определенности, что $\widetilde{\Delta b}\in K_b$, G замкнуто, а функции $-f_0(x)$, $f_j(x)$ $\forall j\in\mathrm{N}_m$ непрерывны на G. Применение метода (28.18) к задаче (28.30) согласно теореме 28.1 должно привести к (единственному при этих предположениях) оптимальному вектору x_τ задачи

$$\sup\{f_0(x)-\tau\|x\|^2\colon\ f_j(x)\leqslant b_j+\widetilde{\Delta b}_j\quad \forall j\in\mathrm{N}_m,\ x\in G\}.$$

Очевидно, что вектор x_τ является оптимальным и для задачи

$$\sup\{f_0(x)-2\tau(x_\tau,x)\colon\ f_j(x)\leqslant b_j+\widetilde{\Delta b}_j\quad \forall j\in\mathrm{N}_m,\ x\in G\},$$

причем по лемме 28.3 выбор достаточно малого $\tau>0$ гарантирует близость вектора $2\tau x_\tau$ к минимальному по норме элементу $\widetilde{\Delta c}$ множества (см. § 26)

$$K_c=\{\Delta c\colon\ M^*(\Delta c)\neq\varnothing\},$$

где

$$M^*(\Delta c)=\left\{u\geqslant 0\colon\ \sup_{x\in G}(F(x,u)-(\Delta c,x))<+\infty\right\}.$$

§ 29. Циклическое проектирование на систему выпуклых множеств с пустым пересечением

Пусть в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ задана система выпуклых замкнутых множеств $\{M_j\colon j\in\in\mathrm{N}_m\}$. Под процессом циклического проектирования на эту систему понимается построение последовательности точек $\{x^k\}$ по следующей схеме: $x^0\in\mathbf{R}^n$ произвольно,

$$x^{k+1}=x^k+\lambda_k\left(P_{j_k}(x^k)-x^k\right),\quad \lambda_k\in[0,2],\qquad (29.1)$$

$$j_k=k\,(\mathrm{mod}\,m)+1.$$

В случае $\bigcap\limits_{j\in N_m} M_j \neq \varnothing$ этот процесс приводит к нахождению общей точки множеств $\{M_j\colon j\in \mathbf{N}_m\}$. Настоящий параграф посвящен анализу процесса в ситуации $\bigcap\limits_{j\in N_m} M_j = \varnothing$.

29.1. Вспомогательные результаты. Под δ-окрестностью множества Q будем понимать множество $Q^\delta = \{x\in\mathbf{R}^n\colon \|x-Q\|\leqslant\delta\}$.

Лемма 29.1. *Если замкнутое выпуклое множество S содержится в δ-окрестности замкнутого выпуклого множества Q, то*

$$\|x+\lambda(P_Q(x)-x)-S\|^2\leqslant$$
$$\leqslant \|x-S\|^2+\lambda(\lambda-2)\|x-Q\|^2+2\lambda\delta\|x-Q\| \quad (29.2)$$

для всех $x\notin Q^\delta$ и $\lambda\in(0, 2)$.

Доказательство. В целях удобства обозначим $P_Q^\lambda(x) = x+\lambda(P_Q(x)-x)$, $\tilde{y} = P_{Q^\delta}(x)$. Отметим, что $\tilde{y}\in[x, P_Q(x)]$ и, следовательно, $(x-\tilde{y}, P_Q(x)-x) = \|x-Q\|(\delta-\|x-Q\|)$. Так как

$$(\tilde{y}-x, \tilde{y}-z)\leqslant 0 \quad \forall z\in Q^\delta,$$

то

$$(x-z, P_Q(x)-x)\leqslant(x-\tilde{y}, P_Q(x)-x).$$

Поэтому

$$\|P_Q^\lambda(x)-z\|^2 = \|x-z\|^2+\lambda^2\|x-Q\|^2+2\lambda(x-z, P_Q(x)-$$
$$-x)\leqslant\|x-z\|^2+\lambda(\lambda-2)\|x-Q\|^2+2\lambda\delta\|x-Q\|$$
$$\forall z\in Q^\delta.$$

В частности, при $z=P_S(x)$ получим

$$\|P_Q^\lambda(x)-S\|^2\leqslant\|P_Q^\lambda(x)-z\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|x-S\|^2+\lambda(\lambda-2)\|x-Q\|^2+2\lambda\delta\|x-Q\|,$$

что и требовалось.

Лемма 29.2. *Если выполнены условия предыдущей леммы, то* $\|P_Q^\lambda(x)-S\|\leqslant\|x-S\|+2\lambda\delta/(2-\lambda)$ *для всех $x\in\mathbf{R}^n$ и $\lambda\in(0, 2)$.*

Доказательство. Если $\|x-Q\|>2\delta/(2-\lambda)$, то из (29.2) следует $\|P_Q^\lambda(x)-S\|<\|x-S\|$. Если же $\|x-Q\|\leqslant 2\delta/(2-\lambda)$, то $\|P_Q^\lambda(x)-z\|\leqslant\lambda\|x-Q\|+\|x-z\|\leqslant 2\lambda\delta/(2-\lambda)+\|x-z\|$ $\forall z\in\mathbf{R}^n$. В частности, при

$z = P_S(x)$

$$\| P_Q^\lambda(x) - S \| \leqslant \| P_Q^\lambda(x) - z \| \leqslant \| x - S \| + 2\lambda\delta/(2-\lambda).$$

Лемма доказана.

Лемма 29.3. *Пусть Q — выпуклое замкнутое множество. Если при некотором $\lambda' \in (0, 2)$*

$$\| P_Q^{\lambda'}(x) - P_Q^{\lambda'}(y) \| = \| x - y \|,$$

то

$$P_Q^\lambda(x) - P_Q^\lambda(y) = x - y$$

для всех $\lambda \in (0, 2)$.

Доказательство. В случае $\lambda' = 1$ заключение леммы следует из неравенства

$$\|P_Q(x) - P_Q(y)\|^2 \leqslant (x - y,\ P_Q(x) - P_Q(y))$$

и из неравенства Коши — Буняковского.

Пусть $\lambda' \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \| P_Q^{\lambda'}(x) - P_Q^{\lambda'}(y) \|^2 &= (1-\lambda')^2 \| x - y \|^2 + (\lambda')^2 \| P_Q(x) - \\ &- P_Q(y) \|^2 + 2\lambda'(1-\lambda')(x - y,\ P_Q(x) - P_Q(y)) \leqslant \\ &\leqslant (1-\lambda')^2 \| x - y \|^2 + (\lambda')^2 \| x - y \|^2 + 2\lambda'(1-\lambda') \| x - \\ &- y \|^2 = \| x - y \|^2, \end{aligned}$$

при этом равенство возможно в том только случае, если $\|P_Q(x) - P_Q(y)\| = \|x - y\|$, т. е. $P_Q(x) - P_Q(y) = x - y$. Это влечет $P_Q^\lambda(x) - P_Q^\lambda(y) = x - y$ для всех $\lambda \in (0, 2)$.

Пусть $\lambda' \in (1, 2)$. В этом случае

$$\begin{aligned} \| P_Q^{\lambda'}(x) - P_Q^{\lambda'}(y) \|^2 &= (\lambda' - 1)^2 \| x - y \|^2 + \\ &+ (\lambda')^2 \| P_Q(x) - P_Q(y) \|^2 - 2\lambda'(\lambda' - 1)(x - y,\ P_Q(x) - \\ &- P_Q(y)) \leqslant (\lambda' - 1)^2 \| x - y \|^2 + (\lambda')^2 \| P_Q(x) - P_Q(y) \|^2 - \\ &- 2\lambda'(\lambda' - 1) \| P_Q(x) - P_Q(y) \|^2 = (\lambda' - 1)^2 \| x - y \|^2 + \\ &+ \lambda'(2 - \lambda') \| P_Q(x) - P_Q(y) \|^2 \leqslant \| x - y \|^2, \end{aligned}$$

причем равенство достигается лишь в случае $\|P_Q(x) - P_Q(y)\| = \|x - y\|$. Отсюда $P_Q^\lambda(x) - P_Q^\lambda(y) = x - y$ для каждого $\lambda \in (0, 2)$.

Следствие 29.1. *Если $\| P_Q^{\lambda'}(x) - P_Q^{\lambda'}(y) \| = \| x - y \|$ при некотором $\lambda' \in (0, 2)$, то*

$$\left(x - P_Q^\lambda(x),\ P_Q^\lambda(x) - P_Q^\lambda(y)\right) = 0$$

для всех $\lambda \in (0, 2)$.

Следствие 29.2. *Пусть* $\mathscr{P}^\lambda = P_m^{\lambda_m} \cdot \ldots \cdot P_1^{\lambda_1}$ — *оператор циклического проектирования на систему* $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$ *выпуклых замкнутых множеств и* $\lambda_j \in (0, 2)$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$. *Если* $\|\mathscr{P}^\lambda(x) - \mathscr{P}^\lambda(y)\| = \|x - y\|$, *то*

$$x - y = P_k^{\lambda_k} \cdot \ldots \cdot P_1^{\lambda_1}(x) - P_k^{\lambda_k} \cdot \ldots \cdot P_1^{\lambda_1}(y) \quad \forall k \in \mathbf{N}_m;$$

кроме того,

$$\left(x - y,\, x - P_1^{\lambda_1}(x)\right) = 0,$$

$$\left(x - y,\, P_k^{\lambda_k} \cdot \ldots \cdot P_1^{\lambda_1}(x) - P_{k+1}^{\lambda_{k+1}} P_k^{\lambda_k} \cdot \ldots \cdot P_1^{\lambda_1}(x)\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}_{m-1}.$$

29.2. Условия ограниченности итерационной последовательности. Введем условие P: $\exists \delta \geqslant 0$ такое, что $\bigcap\limits_{i=1}^{m} M_i^\delta$ непусто и ограничено.

Теорема 29.1. *Пусть выполнено условие* P. *Если последовательность чисел* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям*

$$0 < \lambda_k \leqslant 2 - \varepsilon < 2 \quad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{29.3}$$

$$\lambda_{k+1}/\lambda_k \leqslant R < +\infty \quad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{29.4}$$

$$\exists r \in \mathbf{N}\colon\ 0 < \nu \leqslant \inf_{s \in \mathbf{N}} \min_{i, j \in \mathbf{N}_m} \frac{\lambda_{sm+r+i}}{\lambda_{sm+r+j}}, \tag{29.5}$$

то последовательность (29.1) *ограничена.*

Доказательство. Считаем, не ограничивая общности, что $r = 0$. Определим последовательность звеньев $\{\omega_s\}$ следующим образом:

$$\omega_s = [x^{sm+1}, \ldots, x^{(s+1)m+1}].$$

В s-м звене ω_s среди отрезков

$$\{[x^{sm+i},\, x^{sm+i+1}]\}_{i \in \mathbf{N}_m}$$

зафиксируем один, имеющий наибольшую длину:

$$\left\| x^{sm+r_s} - x^{sm+r_s+1} \right\| = \max_{i \in \mathbf{N}_m} \left\| x^{sm+i} - x^{sm+i+1} \right\|.$$

Составим из элементов $x^{k_s} = x^{sm+r_s}$ последовательность $\{x^{k_s}\}$. Отметим, что $k_{s+1} - k_s < 2m$. Докажем неравенство

$$\left\| x^{k_s} - x^{k_s+1} \right\| \geqslant \frac{\theta_s}{(3 - \varepsilon)\, m} \max_{j \in \mathbf{N}_m} \left\| x^{k_s} - M_j \right\| \quad \forall s \in \mathbf{N}, \tag{29.6}$$

где $\theta_s = \min\limits_{i \in \mathbf{N}_m} \lambda_{sm+i}$. Предполагая нарушение неравенства при некотором $\bar{s}$, оценим длину l звена $\omega_{\bar{s}}$ с отрезком $\left[x^{\bar{s}m+1}, x^{(\bar{s}+1)m+1}\right]$:

$$l = \sum_{j=1}^{m} \left\| x^{\bar{s}m+j} - x^{\bar{s}m+j+1} \right\| + \left\| x^{\bar{s}m+1} - x^{(\bar{s}+1)m+1} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2m \left\| x^{k_{\bar{s}}} - x^{k_{\bar{s}}+1} \right\| < \frac{2\theta_{\bar{s}}}{3-\varepsilon} \max_{j \in \mathbf{N}_m} \left\| x^{k_{\bar{s}}} - M_j \right\|.$$

С другой стороны, для $j = 2, \ldots, m$ имеем:

$$\left\| x^{k_{\bar{s}}} - M_j \right\| \leqslant \left\| x^{k_{\bar{s}}} - x^{\bar{s}m+j} \right\| + \left\| x^{\bar{s}m+j} - P_j\left(x^{\bar{s}m+j-1}\right) \right\| =$$
$$= \left\| x^{k_{\bar{s}}} - x^{\bar{s}m+j} \right\| + \lambda^{-1}_{\bar{s}m+j-1} \left| 1 - \lambda_{\bar{s}m+j-1} \right| \cdot \left\| x^{\bar{s}m+j} - x^{\bar{s}m+j-1} \right\|.$$

Если $j = 1$, то

$$\left\| x^{k_{\bar{s}}} - M_1 \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| x^{k_{\bar{s}}} - x^{(\bar{s}+1)m+1} \right\| + \left\| x^{(\bar{s}+1)m+1} - P_1\left(x^{(\bar{s}+1)m}\right) \right\| =$$
$$= \left\| x^{k_{\bar{s}}} - x^{(\bar{s}+1)m+1} \right\| +$$
$$+ \lambda^{-1}_{(\bar{s}+1)m} \left| 1 - \lambda_{(\bar{s}+1)m} \right| \cdot \left\| x^{(\bar{s}+1)m+1} - x^{(\bar{s}+1)m} \right\|.$$

Легко видеть, что

$$\left\| x^{k_{\bar{s}}} - x^{\bar{s}m+j-1} \right\| \leqslant \frac{1}{2} l,$$

$$\left\| x^{\bar{s}m+j+1} - x^{\bar{s}m+j} \right\| \leqslant \frac{1}{2} l \quad \forall j \in \mathbf{N}_m,$$

так как все точки $x^{\bar{s}m+j}$ $\forall j \in \mathbf{N}_m$ лежат на замкнутой ломаной длиною l. Поэтому

$$\max_{j \in \mathbf{N}_m} \left\| x^{k_{\bar{s}}} - M_j \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} l \max\left\{\lambda^{-1}_{(\bar{s}+1)m}, \max_{i \in \mathbf{N}_{m-1}} \lambda^{-1}_{\bar{s}m+i}\right\} = \frac{1}{2} l \left(1 + \theta_{\bar{s}}^{-1}\right).$$

Тогда из предыдущего следует

$$l < \frac{2 \cdot \theta_{\bar{s}}}{3-\varepsilon} \max_{i \in \mathbf{N}_m} \left\| x^{k_{\bar{s}}} - M_j \right\| \leqslant \frac{l}{3-\varepsilon}\left(1 + \theta_{\bar{s}}\right),$$

что противоречит условию (29.3). Неравенство (29.6) доказано. Пусть $\delta > 0$ таково, что множество $S = \bigcap_{j \in \mathbf{N}_m} M_j^\delta$ телесно. Это влечет выполнимость соотношения

$$\|x - S\| \leqslant C_0 \max_{j \in \mathbf{N}_m} (\|x - M_j\| - \delta)^+ \leqslant C_0 \max_{j \in \mathbf{N}_m} \|x - M_j\|$$

при любых $x \in \mathbf{R}^n$ (см. [30, с. 1038]). Так как $\|x^{k_s} - x^{k_s+1}\| = \lambda_{k_s} \left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\|$, то из (29.5), (29.6) следует

$$\left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\nu}{(3-\varepsilon)m} \max_{j \in \mathbf{N}_m} \|x^{k_s} - M_j\| \geqslant \frac{\nu}{C_0 (3-\varepsilon) m} \|x^{k_s} - S\| \quad (29.7)$$

при всех $s \in \mathbf{N}$. Согласно лемме 29.1 для всех x^{k_s} таких, что $\left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\| > \delta$, выполняется неравенство

$$\|x^{k_s+1} - S\|^2 \leqslant \|x^{k_s} - S\|^2 +$$
$$+ \lambda_{k_s} \left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\| \left(2\delta - (2 - \lambda_{k_s}) \left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\| \right).$$

В частности, для $\gamma \in (0, \varepsilon)$ и всех x^{k_s}, удовлетворяющих условию

$$\left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\| > 2\delta/(\varepsilon - \gamma), \quad (29.8)$$

получим, что

$$\|x^{k_s+1} - S\|^2 \leqslant \|x^{k_s} - S\|^2 - \gamma \lambda_{k_s} \left\| x^{k_s} - M_{j_{k_s}} \right\|^2.$$

В таком случае из (29.7), (29.8) следует

$$\|x^{k_s+1} - S\|^2 \leqslant \left(1 - \lambda_{k_s} \gamma \left(\frac{\nu}{C_0 (3-\varepsilon) m} \right)^2 \right) \|x^{k_s} - S\|^2$$

при всех x^{k_s} таких, что

$$\|x^{k_s} - S\| > r = 2C_0 (3 - \varepsilon) \delta m \nu^{-1} (\varepsilon - \gamma)^{-1}$$

(если таковые найдутся в последовательности). Обозначая $\mu = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\nu}{C_0 (3-\varepsilon) m} \right)^2$, приходим к неравенству

$$\|x^{k_s+1} - S\| \leqslant (1 - 2\mu\lambda_{k_s})^{1/2} \|x^{k_s} - S\| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \mu\lambda_{k_s}) \|x^{k_s} - S\|, \quad (29.9)$$

выполняющемуся для $x^{k_s} \notin S^r$.

Увеличим r настолько, чтобы было

$$\mu r \geqslant \frac{2\delta}{\varepsilon} \sum_{t=1}^{2m} R^t, \quad \| x^0 - S \| \leqslant r.$$

Докажем, что $x^{k_s} \in S^{r_1}$, где $r_1 = r + 8m\delta\varepsilon^{-1}$.

1. Согласно лемме 29.2 и условию (29.3)

$$\| x^{k+1} - S \| \leqslant \| x^0 - S \| + 2\lambda_k \delta (2 - \lambda_k)^{-1} \leqslant \leqslant \| x^k - S \| + 4\delta\varepsilon^{-1},$$

поэтому

$$\| x^{k_0} - S \| \leqslant \| x^0 - S \| + 4k_0\delta\varepsilon^{-1} \leqslant \| x^0 - S \| + 4m\delta\varepsilon^{-1}.$$

2. В предположении $x^{k_s} \in S^{r_1}$ докажем $x^{k_{s+1}} \in S^{r_1}$.

а) Пусть $\| x^{k_s} - S \| \leqslant r$. Тогда

$$\| x^{k_{s+1}} - S \| \leqslant \| x^{k_s} - S \| + (k_{s+1} - k_s) 4\delta\varepsilon^{-1} < r_1.$$

б) Пусть $r < \| x^{k_s} - S \| \leqslant r_1$.

Из леммы 29.2 и (29.9) следует

$$\| x^{k_{s+1}} - S \| \leqslant \| x^{k_{s+1}} - S \| + \frac{2\delta}{\varepsilon} \sum_{t=k_s+1}^{k_{s+1}-1} \lambda_t \leqslant \leqslant \| x^{k_s} - S \| + \frac{2\delta}{\varepsilon} \sum_{t=k_s+1}^{k_{s+1}-1} \lambda_t - \mu r \lambda_{k_s}.$$

В силу условия (29.4) имеем:

$$\lambda_{k_s}^{-1} \sum_{t=1}^{2m} \lambda_{k_s+t} = \sum_{t=1}^{2m} \prod_{i=k_s}^{k_s+t} (\lambda_{i+1}\lambda_i^{-1}) \leqslant \sum_{t=1}^{2m} R^t,$$

поэтому

$$\frac{2\delta}{\varepsilon} \sum_{t=k_s+1}^{k_{s+1}-1} \lambda_t - \mu r \lambda_{k_s} \leqslant 0.$$

Отсюда

$$\| x^{k_{s+1}} - S \| \leqslant \| x^{k_s} - S \| \leqslant r_1.$$

Индукция завершена. Поскольку для любого $k \in \mathbf{N}$

найдется s такое, что $0 \leqslant k - k_s < 2m$, то

$$\|x^k - S\| \leqslant \|x^{k_s} - S\| + 8m\delta\varepsilon^{-1} \leqslant r_1 + 8m\delta\varepsilon^{-1} \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Так как S ограничено, это доказывает ограниченность последовательности $\{x^k\}$ в целом.

Отметим, что выбор $\{\lambda_k\}$ из условий

$$0 < \varepsilon \leqslant \lambda_k \leqslant 2 - \varepsilon \ \forall k$$

или

$$\lambda_k = \varepsilon_{[k/m]+1}, \quad \varepsilon_k \to +0, \quad \varepsilon_{k+1}/\varepsilon_k \leqslant R$$

гарантирует выполнимость (29.3)—(29.5).

Следствие 29.3. [68]. *Пусть множества* $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$ *есть полупространства* $\{x \in \mathbf{R}^n\colon (a_j, x) - \alpha_j \leqslant 0\}$, $j \in \mathbf{N}_m$. *Если выполнены условия* (29.3)—(29.5), *то для последовательности* (29.1) *справедливо соотношение*

$$\sup_k \|x^k - S\| < \infty,$$

где $S = \bigcap\limits_{j \in \mathbf{N}_m} M_j^\delta \neq \varnothing$.

29.3. Строение множества предельных точек последовательности с постоянными коэффициентами итераций. Строение множества предельных точек последовательности (29.1) с $\lambda = 1$ в случае компактности или ограниченности одного из множеств $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$ исследовалось в [118, 18]. В настоящем пункте дается уточнение этих результатов.

Теорема 29.2. *Пусть последовательность* $\{x^k\}$ *определена согласно* (29.1), *где* $\lambda_k = \alpha_{i_k}$, $i_k = k (\mathrm{mod}\, m) + 1$, *причем* $0 < \alpha_i < 2$ $\forall i \in \mathbf{N}_m$. *Если выпуклые замкнутые множества* $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$ *удовлетворяют условию* P, *то последовательность* $\{y^s = x^{sm}\}_{s \in \mathbf{N}}$ *сходится к неподвижной точке оператора циклического проектирования* $\mathcal{P}^\alpha = P_m^{\alpha_m} \ldots P_1^{\alpha_1}$.

Доказательство. Легко видеть, что $y^{s+1} = \mathcal{P}^\alpha(y^s)$. Сделаем предварительные замечания.

1. Обозначим $\beta = \inf\limits_s \|\mathcal{P}^\alpha(y^s) - y^s\|$. Так как оператор $\mathcal{P}^\alpha$ является нерасширяющим, то

$$\|\mathcal{P}^\alpha(y^{s+1}) + y^{s+1}\| \leqslant \|\mathcal{P}^\alpha(y^s) - y^s\| \quad \forall s \in \mathbf{N}. \qquad (29.10)$$

Непрерывность $\mathcal{P}^\alpha$ влечет $\|\mathcal{P}^\alpha(p) - p\| = \beta$ для всякой предельной точки $p \in \{y^s\}'$.

2. Если $p \in \{y^s\}'$, то $\mathcal{P}^\alpha(p) \in \{y^s\}'$, что следует непосредственно из (29.10).

Условия теоремы 29.1 выполнены, поэтому последовательность $\{y^s\}$ ограничена. Пусть p — некоторая предельная точка последовательности $\{y^s\}$. Из замечаний следует, что предельными будут также все точки вида $[\mathcal{P}^\alpha]^s(p)$, при этом

$$\|[\mathcal{P}^\alpha]^{s+1}(p) - [\mathcal{P}^\alpha]^s(p)\| = \beta \quad \forall s \in \mathbf{N}.$$

Предположим, $\beta > 0$. Применив следствие 29.2, получим

$$[\mathcal{P}^\alpha]^s(p) = s(\mathcal{P}^\alpha(p) - p) + p,$$

откуда $\|[\mathcal{P}^\alpha]^s(p) - p\| = s\beta \to \infty$ при $s \to \infty$. Последнее противоречит ограниченности последовательности $\{y^s\}$ и заставляет принять β равным нулю. В таком случае $\mathcal{P}^\alpha(p) = p$. Единственность предельной точки следует из факта монотонного убывания $\|y^s - p\|$ с ростом s. Теорема доказана.

Из факта строгой выпуклости пространства $\mathbf{R}^n$ следует выпуклость множества Q_m неподвижных точек оператора $\mathcal{P}^\alpha$. Выпуклость и замкнутость Q_m следуют также из легко проверяемого свойства Q_m-фейеровости оператора $\mathcal{P}^\alpha$.

Неподвижная точка оператора $\mathcal{P}^\alpha$, принадлежащая множеству M_m, индуцирует систему точек $\{p_i\colon i \in \mathrm{N}_{m-1}\}$, каждая из которых является неподвижной точкой соответствующего оператора циклического проектирования.

Систему $\{p_i \in M_i\colon i \in \mathrm{N}_m\}$ таких неподвижных точек назовем обобщенным *$\mathcal{P}^\alpha$-решением* системы множеств $\{M_j\colon j \in \mathrm{N}_m\}$.

На $\mathcal{P}^\alpha$-решение можно посмотреть, с другой стороны, как на аргумент задачи минимизации некоторого функционала на множествах $\{M_j\colon j \in \mathrm{N}_m\}$. Введем функционал $h\colon M_1 \times \ldots \times M_m \to \mathbf{R}_+$ (вообще говоря, не выпуклый) следующего вида:

$$h(z_1, \ldots, z_m) = \left\| P_1^{\alpha_1}(z_m) - z_1 \right\| + \sum_{i=1}^{m-1} \left\| P_{i+1}^{\alpha_{i+1}}(z_i) - z_{i+1} \right\|.$$

Теорема 29.3. *Если $h(z_1, \ldots, z_m)$ достигает минимума на $M_1 \times \ldots \times M_m$, то его значение равно нулю.*

Доказательство основывается на следствии 29.2 и следует теореме 2.3 (см. [64, ч. II, с. 43]).

Следствие 29.4. *Множество $\mathcal{P}^\alpha$-решений совпадает со множеством* $\operatorname{Arg\,min}\{h(z_1, \ldots, z_m)\colon z_i \in M_i,\ i \in \mathrm{N}_m\}$.

29.4. Сходимость процесса с переменным шагом итерации. Целью настоящего пункта будет показать, что при определенном стремлении к нулю коэффициентов $\{\lambda_k\}$ предельные точки последовательности (29.1) принадлежат множеству $\tilde{M}$ оптимальных решений задачи

$$\min_x \sum_{j=1}^m K_j \|x - M_j\|^2, \quad \{K_j > 0\colon j \in \mathbf{N}_m\}, \tag{29.11}$$

аппроксимирующей исходную задачу нахождения общей точки множеств $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$. Отметим, что в случае проектирования на наиболее удаленное множество из числа $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$ последовательность при близких условиях сходится к чебышевскому множеству системы множеств $\{M_j\}$ [86].

Рассмотрим следующую процедуру для безусловной минимизации выпуклой функции $f(x)$:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k (h_k + \xi_k),$$

$$\alpha_k \to +0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty.$$

Здесь $h_k \in \partial f(x^k)$, а ξ_k — вектор помех. Обозначим

$$f^* = \min_x f(x), \quad \widetilde{M} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon f(x) \leqslant f^*\} \neq \varnothing.$$

Если из условия $f(x^k) \to +0$ следует $\|x^k - M\| \to 0$, где $M = \{x \in \mathbf{R}^n\colon f(x) \leqslant 0\}$, то ограничение $f(x) \leqslant 0$ называют корректным.

Лемма 29.4. *Если $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, ограничение $f(x) \leqslant f^*$ корректно и*

$$\sup_k \max\{\|h_k\|, \|x^k - \widetilde{M}\|\} < \infty, \tag{29.12}$$

то $\|x^k - \widetilde{M}\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство леммы проводится по обычной для субградиентных методов схеме (см. [38, теоремы 5 и 6]).

Обозначим $d_1(x) = \sum_{i=1}^m K_i \|x - M_i\|^2$.

Теорема 29.4. *Пусть выпуклые замкнутые множества $\{M_j\colon j\in \mathbb{N}_m\}$ удовлетворяют условию P. Если*

$$\lambda_k\to +0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\infty,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}<\infty,$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\lambda_{sm+i}}{\lambda_{sm+i-1}}=\frac{K_{i+1}}{K_i}\quad \forall i\in \mathbb{N}_{m-1}, \tag{29.13}$$

то для последовательности $\{x^k\}$, построенной согласно (29.1), справедливо $\|x^k-\tilde{M}\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Доказательство. По определению последовательности $\{x^k\}$ имеем:

$$x^{sm+1}=x^{sm}+\lambda_{sm}(P_1(x^{sm})-x^{sm}),$$

$$x^{sm+2}=x^{sm+1}+\lambda_{sm+1}(P_2(x^{sm+1})-x^{sm+1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x^{(s+1)m}=x^{(s+1)m-1}+\lambda_{(s+1)m-1}(P_m(x^{(s+1)m-1})-x^{(s+1)m-1}).$$

Складывая эти соотношения, получаем

$$x^{(s+1)m}=x^{sm}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_{sm+i-1}(P_i(x^{sm+i-1})-x^{sm+i-1}). \tag{29.14}$$

Вследствие (29.13)

$$\lambda_{sm+i}\lambda_{sm+i-1}^{-1}=K_{i+1}K_i^{-1}+\alpha_s^i,\quad \lim_{s\to\infty}\alpha_s^i=0\quad \forall i\in \mathbb{N}_{m-1},$$

поэтому

$$\frac{\lambda_{sm+i-1}}{\lambda_{sm}}=\frac{\lambda_{sm+i-1}}{\lambda_{sm+i-2}}\cdots\frac{\lambda_{sm+1}}{\lambda_{sm}}=$$

$$=\left(\frac{K_i}{K_{i-1}}+\alpha_s^{i-1}\right)\cdots\left(\frac{K_2}{K_1}+\alpha_s^1\right)=\frac{K_i}{K_1}+\beta_s^i,$$

где $\beta_s^i\to 0$ при $s\to\infty$ $\forall i\in \mathbb{N}_m\diagdown \mathbb{N}_1$. Учитывая это, перепишем (29.14) в виде

$$x^{(s+1)m}=x^{sm}+\lambda_{sm}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{K_1}(P_i(x^{sm})-x^{sm})+\sigma_s^1+\sigma_s^2\right],$$

где

$$\sigma_s^1 = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_s^{i+1} (P_{i+1}(x^{sm+i}) - x^{sm+i}),$$

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{K_i}{K_1} [(P_i(x^{sm+i-1}) - P_i(x^{sm})) + (x^{sm} - x^{sm+i-1})].$$

Произведем оценку слагаемых σ_s^1 и σ_s^2. С ростом k условия теоремы 29.1 будут выполнены, поэтому последовательность $\{x^k\}$ ограничена. В частности, будет конечной величина $\sup\limits_k \| x^k - S \|$, где $S = \bigcap\limits_{i \in N_m} M_i^\delta$. Отсюда

$$\sup_k \| x^k - P_{j_k}(x^k) \| \leqslant \sup_k \| x^k - S \| + \delta \leqslant R.$$

Тогда для σ_s^1 будем иметь:

$$\| \sigma_s^1 \| \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} | \beta_s^{i+1} | \cdot \| P_{i+1}(x^{sm+i}) - x^{sm+i} \| \leqslant R \sum_{i=1}^{m-1} | \beta_s^{i+1} |.$$

Подобным образом для σ_s^2 получаем:

$$\| \sigma_s^2 \| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{K_i}{K_1} (\| P_i(x^{sm+i-1}) - P_i(x^{sm}) \| + $$
$$+ \| x^{sm} - x^{sm+i-1} \|) \leqslant 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{K_i}{K_1} \| x^{sm+i-1} - x^{sm} \| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{m} \frac{K_i}{K_1} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \| x^{sm+j} - x^{sm+j-1} \| \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2m}{K_1} \max_{i \in N_m} K_i \cdot \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_{sm+j-1} \| P_j(x^{sm+j-1}) - x^{sm+j-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant RA \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_{sm+i}.$$

Следовательно,

$$\| \sigma_s^1 + \sigma_s^2 \| \leqslant \| \sigma_s^1 \| + \| \sigma_s^2 \| \leqslant R \left(\sum_{i=2}^{m} | \beta_s^i | + A \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_{sm+i} \right),$$

т. е. $\lim\limits_{s \to \infty} (\sigma_s^1 + \sigma_s^2) = 0$. Так как выпуклая функция $d_1(x)$ дифференцируема и ее градиент равен $2 \sum\limits_{i=1}^{m} K_i (x - P_i(x))$, то остается показать законность применения леммы 29.4 к последовательности $\{x^{sm}\}_{s\in\mathbf{N}}$.

Непустота и ограниченность $\widetilde{M}$ являются следствием очевидного неравенства

$$d_1(x) \geqslant \min_{i\in\mathbf{N}_m} K_i d_0^2(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

где $d_0(x) = \max_{i\in\mathbf{N}_m} \|x - M_i\|$, и ограниченности

$$S = \bigcap_{i\in\mathbf{N}_m} M_i^\delta = \{x \in \mathbf{R}^n\colon\ d_0(x) \leqslant \delta\},$$

продиктованной условием P. Это в свою очередь влечет корректность ограничения $d_1(x) \leqslant d_1^*$. Справедливость (29.12) очевидна ввиду ограниченности $\{x^k\}$.

Условие (29.13) гарантирует расходимость ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{sm}$. Таким образом, условия леммы 29.4 выполнены, следовательно, $\|x^{sm} - \widetilde{M}\| \to 0$ при $s \to \infty$. Сейчас легко показать сходимость к $\widetilde{M}$ всей последовательности $\{x^k\}$. Действительно, так как

$$\|x^{sm+i} - \widetilde{M}\| \leqslant \sum_{j=1}^{i} \|x^{sm+j} - x^{sm+j-1}\| + \|x^{sm} - \widetilde{M}\| \leqslant$$
$$\leqslant R \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{sm+j} + \|x^{sm} - \widetilde{M}\| \quad \forall i \in \mathbf{N}_{m-1},$$

а $\{x^k\}_{k\in\mathbf{N}} = \bigcup_{i=1}^{m} \{x^{(s-1)m+i}\}_{s\in\mathbf{N}}$, то $\|x^k - \widetilde{M}\| \to 0$. Теорема доказана.

В случае, когда множества $\{M_j\}$ представляют собой полупространства, т. е.

$$M_j = \{x \in \mathbf{R}^n\colon\ (a_j, x) - \alpha_j \leqslant 0\}, \qquad (29.15)$$

условие P становится излишним.

Лемма 29.5. [68]. *Пусть* $\{M_j\colon j \in \mathbf{N}_m\}$ — *полупространства* (29.15). *Тогда из* $d_1(x^k) \to d_1^*$ *следует* $\|x^k - \widetilde{M}\| \to 0$.

Теорема 29.5. *Пусть процесс проектирования на систему полупространств* (29.15) *определен согласно* (29.1). *Если последовательность чисел* $\{\lambda_k\}$ *удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то* $\|x^k - \widetilde{M}\| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство следует теореме 2 из [68].

ГЛАВА VII

ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

§ 30. Причины возникновения несовместных задач планирования производства

Основные причины появления несовместных задач планирования промышленного производства могут быть выявлены лишь путем изучения поведения реальных производственных систем и сложившейся практики планирования. Отметим следующие два момента. Производство конкретного предприятия следует рассмотреть как ограниченно-вероятностную систему, поведение которой определяют в основных вопросах объективные законы развития социалистического производства. Основная реализация этих законов осуществляется через плановые задания. Однако в этой системе имеют место случайные возмущения и стохастические связи, которые привносят фактор неопределенности в процесс планирования производства.

С другой стороны, в каждый конкретный момент времени общество располагает количественно определенными (ограниченными) производственными ресурсами, и общественные потребности превышают возможности их удовлетворения. Поэтому для все более полного удовлетворения растущих потребностей общества необходимо как можно полнее использовать возможности социалистического производства. Таким образом, стремление наиболее эффективно организовать промышленное производство при наличии фактора неопределенности может породить несовместность в задачах оптимального планирования. Эта гипотетическая возможность реализуется через существующую систему планирования производства.

Так при разработке плановых программ используется принцип многоступенчатости (иерархичности) проведения расчетов. В этом случае на более высоком уровне иерархии в связи с информационными и вычислительными трудностями нижестоящий (локальный) объект планирования описывается агрегированной моделью. Описанные в агрегированной (а значит и не полной) экономико-математической модели ресурсы соотносятся со спросом на продукцию и при существующей экономической ситуации, когда продукция большинства отраслей народного хозяйства дефицитна, выбирается вариант плана с максимальным, безрезервным использованием ресурсов. Установленное таким образом плановое задание при более полном учете ресурсных возможностей объекта планирования может быть невыполнимым для оптимизируемой системы.

Проблема несовместности усугубляется еще и тем, что многие в прошлом не столь дефицитные и по традиции не учитываемые в должной степени ресурсы в настоящее время существенно лимитируют выпуск продукции. Например, далеко не всегда выполняются ограничения на рациональное использование воздушного и водного бассейнов промышленно развитых районов, что приводит к ухудшению условий жизни населения и вызывает повышенную миграцию из этих районов; тем самым обостряется ситуация с обеспеченностью трудовыми ресурсами таких отраслей народного хозяйства, как черная и цветная металлургия, химическая и цементная промышленность. К таким же последствиям приводит и противоречивость других условий, описывающих интересы воспроизводства рабочей силы. Недостаточные капитальные вложения в жилищное строительство, в обеспечение условий труда и отдыха, медицинское обслуживание в конечном счете могут вызывать снижение ресурсных возможностей оптимизируемых систем и привести к противоречивым ситуациям.

К причинам, порождающим несовместность ограничений задач планирования производства, следует отнести и несовершенство системы ценообразования. Приведем такой пример. На предприятии необходимо увеличить выпуск продукции. Имеется два возможных варианта развития: или на основе расширения использования существующей технологии, или за счет внедрения высокомеханизированных и автоматизированных производственных процессов, причем первый вариант требует меньших затрат, но существенно большего привлечения трудовых ресурсов. С народнохозяйственной точки зрения даже более высокий уровень затрат по второму варианту является экономически оправданным в связи с высокой эффективностью использования дополнительно производимой продукции. Естественно, что на уровне предприятия достаточно затруднительно оценить степень дефицитности различных видов ресурсов, особенно в перспективе, поэтому решение принимается, как правило, исходя из затрат, в то время как «экономически выгодный» вариант развития может быть нереализуем по причине невозможности привлечения дополнительных трудовых ресурсов. Лишь при адекватном отображении меры дефицитности ресурсов в ценах недопустимый вариант развития будет и экономически нецелесообразным.

Противоречивая ситуация может возникать и в процессе решения задач планирования производства по причине несовершенства существующей практики моделирования экономических задач. А именно, при планировании производства максимизируется выпуск продукции (прибыль) или минимизируются затраты при обеспечении производства продукции в заданном объеме и ограничениях на использование лимитированных ресурсов. Однако соотнести планируемый выпуск в достаточно широкой номенклатуре и ресурсные возможности объекта планирования до решения задачи крайне сложно, поэтому задаваемое использование лимитирующих ингредиентов производства не всегда позволяет достигнуть поставленных целей (множество решений пусто). Одним из путей преодоления данного противоречия является построение задач планирования производства как задач последовательной оптимизации: определяется совместность системы ограничений и при необходимости она корректируется минимально возможным образом, затем из всех решений, обеспечивающих этот минимум, выбирается плановая программа с максимальной экономической эффективностью.

Еще одной причиной, приводящей к противоречивой ситуации, является практика планирования от достигнутого, когда без соответствующего анализа возможностей объекта планирования устанавливается несколько большее плановое задание по выпуску продукции, чем в предыдущий период времени. Причины живучести такой схемы планирования очевидны — чрезвычайная простота расчетов, но если планируемый рост производства продукции не обеспечивается необходимыми ресурсными возможностями, то это приводит к установлению невыполнимого планового задания.

Ситуация противоречивости планируемого выпуска продукции и имеющихся в наличии ресурсов имеет очевидные отрицательные экономические последствия. Действительно, в этом случае объект планирования будет стремиться выполнить плановое задание за счет повышения материалоемкости продукции, снижения доли трудоемких, но, как правило, дефицитных изделий, увеличения фонда времени работы оборудования путем неоправданного уменьшения времени на капитальные и планово-предупредительные ремонты, за счет неэффективного использования некоторых видов материальных и трудовых ресурсов, что в конечном итоге ведет к серьезным нарушениям технологии производства, к снижению качественных характеристик выпускаемых изделий, к увеличению сроков освоения новых видов продукции. Естественно, что в этом случае стимулирующая роль оценочных показателей практически сведена к нулю, так как отсутствует возможность выбора из множества допустимых плановых программ оптимального варианта. Следует также отметить, что повышение эффективности и интенсификации производства вызывают необходимость постоянных нововведений, быстрого внедрения новых научных разработок, изменения структуры и ассортимента производимой продукции. В этом случае объект планирования должен иметь некоторые резервы ресурсов для повышения мобильности производства, его восприимчивости к реализации достижений научно-технического прогресса. По-видимому, целесообразно при разработке плановых заданий устанавливать локальному объекту такие показатели по выпуску продукции, чтобы в предплановый период имелась некоторая свобода выбора плановых решений. Такая процедура установления плановых программ приведет и к более полной реализации основного принципа планирования и управления социалистическим народным хозяйством — принципа демократического централизма, предполагающего существование свободы выбора решений в условиях локального объекта.

Если рассматривать промышленное предприятие как самостоятельный хозяйственный механизм, то существующие особенности его производства и сложившаяся практика внутризаводского планирования влекут за собой несовместимость ряда задач оптимального объемно-календарного планирования. Наиболее характерными особенностями, которые непосредственно могут повлечь за собой появление несовместности в задачах планирования сложного промышленного производства, являются следующие:

1) сравнительно большой объем исходной технико-экономической информации, невозможность эвристического определения наиболее существенных разделов этой информации и, в силу этого, невозможность априорной оценки складывающейся на предприятии производственной ситуации в целом;

2) сложность отражения в одной экономико-математической модели всех существенно влияющих на ход производства факторов, что объясняется не столько их многообразием, сколько постоянными изменениями производственных ситуаций, когда существенные факторы перестают быть таковыми, а ранее несущественные начинают лимитировать производственную программу, в силу чего в моделях оптимального планирования оказывается возможным наличие несущественно влияющих факторов и условий, а также отсутствие ряда существенных факторов;

3) наличие неформализуемых условий производства (как правило, технологических особенностей) и противоречивый характер ряда соотношений в экономико-математических моделях оптимизации планов, когда некоторые соотношения должны выполняться только как приближенные, причем степень приближения может быть оценена лишь после получения общей картины хода производства (например, после получения оптимального плана);

4) жесткость условий, накладываемых на план производства, стремление получить план, оптимальный по ряду противоречивых критериев, отсутствие достоверных прогнозов о скрытых резервах производства;

5) отсутствие комплексности планирования, что часто является результатом несогласованности интересов отдельных служб и производств в рамках промышленного предприятия.

Рассмотрим для примера довольно часто встречающуюся в практике планирования ситуацию. Для составления обоснованного плана производства соответствующие службы предприятия должны представить следующую технико-экономическую информацию (которая в процессе планирования будет выступать как исходная):

1) наличие сырья, полуфабрикатов и комплектующих изделий (в целом на период планирования и по отдельным календарным периодам);

2) возможности кооперации со смежными предприятиями;

3) обеспечение подготовки производства;

4) технологические маршруты изготовления изделий. Но эта информация может быть правильно определена только при наличии плана производства, на который она оказывает существенное влияние. Получается как бы замкнутый круг, разорвать который тем труднее, чем больше несовпадение интересов отдельных служб (производств) и предприятия в целом.

Все причины, вызывающие несовместность задач оптимального планирования производства промышленных предприятий, можно разбить на две взаимосвязанных группы: объективные и субъективные.

В первую группу входят причины, обусловленные самим производством или особенностями его планирования. К ним относятся:

а) сложный характер производства, объединяющего разнородные подразделения со сложными взаимосвязями;

б) наличие объективно-обусловленных противоречий между различными подразделениями внутри предприятия;

в) наличие зон неопределенности в ходе производственного процесса;

г) наличие неконтролируемых внешних воздействий как на ход производства, так и на процесс принятия решений при планировании;

д) объективная невозможность полного соответствия плана и хода производства, так как ход производства есть реальный процесс, а план — некоторая его модель.

Вторая группа объединяет причины, характеризующие реальное состояние дел на предприятии в ходе принятия оптимальных решений при планировании его сложного производства. К этой группе относятся (как правило):

а) отставание во времени получения в полном объеме необходимой и достоверной исходной технико-экономической информации для оптимального планирования;

б) отсутствие достаточно полного согласования интересов отдельных производств, подразделений и всего предприятия в целом;

в) несовершенство существующих моделей, методов, алгоритмов оптимального планирования производства промышленных предприятий;

г) отставание прогнозирования от планирования и отсутствие должной взаимосвязи планирования и прогнозирования, что не позволяет правильно оценивать некоторые определяющие параметры производства;

д) наличие субъективных оценок в процессе принятия решений при планировании производства, когда часто завышаются внутренние резервы производства.

Для преодоления возникающих трудностей в ходе оптимизации планов производства в условиях несовместности необходим поиск новых путей, новых подходов к анализу производственных ситуаций, к процессу принятия решений при оптимальном планировании. В таком поиске можно исходить из того, что необходимо обеспечить выполнение следующих основных операций.

1) выделение наиболее существенных разделов исходной технико-экономической информации, влияющих на несовместность; определение ядра несовместности, т. е. тех немногих ограничений, наличие которых обусловливает несовместность, для последующего детального их анализа;

2) получение количественных оценок степени несовместности в задачах оптимального планирования;

3) построение таких экономико-математических моделей планирования производства с соответствующим алгоритмическим обеспечением, которые бы учитывали тот реально существующий факт, что для получения части исходной технико-экономической информации (оптимальным образом определенной) необходимо знать оптимальный план.

§ 31. Методы преодоления несовместности ограничений в задачах перспективного и текущего планирования

При выборе плановой программы для реального экономического объекта необходимым является учет условий его функционирования, таких, как режимы работы оборудования, дискретный или непрерывный характер изменения пропускных способностей производств, вид зависимости затрат от объемов выпуска продукции, согласованная работа отдельных структурных подразделений при многоступенчатой последовательной технологии производства продукции и т. п. Здесь же в целях наглядности и общности изложения процедур корректировки противоречивой системы ограничений не будут отображены многие условия функционирования реальных экономических систем, а предлагаемый подход к преодолению несовместности будет излагаться на примере наиболее простых моделей задач планирования производства.

31.1. Схема моделирования задач планирования производства. Ограничения на выпуск продукции могут быть записаны в виде

$$Ax = d, \tag{31.1}$$

$$x \geqslant 0, \tag{31.2}$$

где x — вектор выпуска, A — матрица, формирующая наборы продукции по позициям планового задания, d — вектор планового задания.

Если выпускаются дефицитные виды продукции, то возможна реализация сверхплановой продукции, поэтому ограничения (31.1) могут быть записаны в виде

$$n \geqslant Ax \geqslant d, \tag{31.1$'$}$$

где n — вектор максимально допустимого выпуска, определяемый на основе спроса на продукцию.

Условия, лимитирующие потребление ресурсов, могут быть сформулированы следующим образом:

$$Bx \leqslant b,$$

где b — вектор ресурсов, B — технологическая матрица, элементы которой задают ресурсоемкость производства единицы продукции.

Если представляется возможным увеличивать количество одних ресурсов, уменьшая расход других (взаимозаменяемость ресурсов), то ограничения на ресурсы примут вид:

$$Bx + (\mathscr{L} - R)w \leqslant b, \tag{31.3}$$

$$0 \leqslant w \leqslant \overline{w}, \tag{31.4}$$

где w — интенсивность использования технологических способов производства дефицитных ресурсов, $\overline{w}$ — допустимая верхняя граница, определяемая возможностями объекта планирования, $\mathscr{L}$ и R — матрицы, элементы которых соответственно равны затратам и выходу ресурсов при единичной интенсивности использования технологических способов.

Введем обозначение: $M = (\mathscr{L} - R)$, тогда условие (31.3) может быть записано в виде

$$Bx + Mw \leqslant b.$$

В том случае, когда производство дефицитных ресурсов сопряжено не только с потреблением выделенных объекту ингредиентов, но и с изменением эффективности работы оптимизируемой экономической системы, функция цели примет вид: найти

$$\max\{(c, x) + (\Delta, w)\}, \tag{31.5}$$

где c — вектор эффективности, Δ — вектор, определяющий изменение эффективности работы объекта планирования при единичной интенсивности использования мероприятий по наращиванию дефицитных ресурсов.

Отметим также, что при записи ограничений на ресурсы допустимой является интерпретация соотношений (31.3), как описывающих возможность снижения удельного расхода одних ингредиентов за счет увеличения потребления других ресурсов в случае изменения коэффициентов удельной ресурсоемкости в одинаковой мере для всех видов продукции. Если же это условие не выполняется, то необходимым является использование более сложных процедур определения значений параметров производства, которые ниже будут рассмотрены.

При решении задачи (31.1)—(31.5) необходимо определить такой выпуск продукции, который позволил бы получить максимальный эффект и выполнить плановое задание, не выходя за имеющиеся ресурсы. В рамках сформулированной задачи оценивается также целесообразность реализации мероприятий по наращиванию лимитирующих выпуск продукции воспроизводимых ресурсов.

Для задачи (31.1)—(31.5) выполняются условия

$$A = [a_{ij}] \geqslant 0, \quad \forall i \exists a_{ij} > 0; \quad B = [b_{ij}] \geqslant 0,$$
$$\forall i \exists b_{ij} > 0; \quad \mathscr{L} = [l_{ij}] \geqslant 0; \quad R = [r_{ij}] \geqslant 0;$$
$$d = [d_i] \geqslant 0; \quad b = [b_i] \geqslant 0;$$

c, Δ — любые.

Приведем схему решения задачи перспективного и текущего планирования в случае противоречивости ограничений (31.1)—(31.4).

31.2. Корректировка противоречий системы ограничений задачи планирования производства. При текущем планировании в случае несовместности условий задачи можно добиться совместности за счет варьирования показателей проекта планового задания, а при перспективном — необходимо так увеличить ресурсы, чтобы можно было обеспечить планируемый выпуск продукции. Это определяется тем, что ресурсоемкость производства продукции обусловлена используемой технологией, имеющимся оборудованием, степенью его использования, качественными характеристиками трудовых и природных ресурсов и т. п., а эти параметры достаточно стабильны во времени и могут быть изменены за счет реконструкции и модернизации производства, приводящих к росту производственных мощностей, замене старых агрегатов более производительными новыми, при освоении месторождений и т. д. Все перечисленные мероприятия требуют относительно больших сроков выполнения, поэтому возможности объекта планирования по снижению норм расхода ресурсов и наращиванию использования дефицитных ингредиентов производства расширяются с увеличением временнóго горизонта. Другими словами, область возможных состояний объекта планирования можно представить в виде расширяющегося конуса, вершиной которого является исходное состояние. Отметим также тот факт, что при рассмотрении близкой перспективы (текущее планирование), хотя и возможно некоторое наращивание использования ресурсов, но, как правило, за счет мероприятий, имеющих большой задел по их реализации. Это, естественно, позволяет достаточно точно оценить максимально возможный рост ресурсов при рассмотрении близкой перспективы.

Содержательный анализ текущего и перспективного планирования позволяет строить процедуры, обеспечивающие минимально возможную допустимую корректировку системы ограничений задач планирования производства в случае их противоречивости. Задача текущего планирования может быть записана в виде: найти

$$\max\{(c,\ x)+(\Delta,\ w)-r(e,\ y)\} \tag{31.6}$$

при ограничениях

$$n \geqslant Ax+y \geqslant d, \tag{31.7}$$

$$Bx+Mw \leqslant b, \tag{31.8}$$

$$x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant w \leqslant \bar{w}, \quad y \geqslant 0, \tag{31.9}$$

где y — корректирующий вектор, $0<r$ — штрафная константа, $e=[1,\ \ldots,\ 1]$.

Что касается задачи перспективного планирования, то при определении оптимальной программы развития объекта планирования начальные периоды времени будут описываться в соответствии с моделью (31.6)—(31.9) и лишь с увеличением горизонта планирования появляется возможность роста объемов потребления ресурсов, а значит и достижения совместности задачи планирования за счет корректировки ресурсных ограничений. В этом случае необходимо найти

$$\max\{(c,\ x)+(\Delta,\ w)-\bar{r}(c^*,\ z)\} \tag{31.10}$$

при ограничениях

$$n\geqslant Ax\geqslant d, \tag{31.11}$$

$$Bx+Mw-z\leqslant b, \tag{31.12}$$

$$x\geqslant 0,\quad 0\leqslant w\leqslant \bar{w},\quad z\geqslant 0, \tag{31.13}$$

где c^* — вектор цен ресурсов, z — вектор увеличения ресурсов, $0<\bar{r}$ — штраф, приходящийся на единицу увеличения.

Система условий вновь сформулированных задач непротиворечива при любых векторах d и b. Например, $x_0=0$, $y_0=b$ удовлетворяет ограничениям (31.7)—(31.9). Нетрудно также видеть, что условия (31.11)—(31.13) совместны.

На основании теоремы 25.1 из [36] можно утверждать, что если система ограничений (31.1)—(31.4) совместна и штраф r в задаче (31.6)—(31.9) больше максимальной по модулю компоненты оптимального плана двойственной к (31.1)—(31.5) задачи, то множества оптимальных планов выпуска продукции задач (31.1)—(31.5) и (31.6)—(31.9) совпадают.

Обозначим через $\bar{b}$ вектор правых частей задачи (31.1)—(31.5) (компоненты вектора $\bar{b}$ неотрицательны), через $\tilde{\varphi}$ — значение целевой функции и через v — двойственные оценки ограничений рассматриваемой задачи. Тогда $\tilde{\varphi}=\min(\bar{b},\ v)\leqslant(\bar{b},\ r^*)$, $r^*=[r,\ \ldots,\ r]$. Отсюда $r\geqslant\tilde{\varphi}/(e,\ \bar{b})=r_0$, где $e=[1,\ \ldots,\ 1]$. Следовательно, r можно представить в виде $r_0+\mu$ (где $\mu\geqslant 0$ — скалярный параметр). Тогда функция цели в задаче (31.6)—(31.9) приобретает вид: найти

$$\max\{(c,\ x)+(\Delta,\ w)-(r_0+\mu)(e,\ y)\}.$$

В качестве $\tilde{\varphi}$ для задачи (31.1)—(31.5), описывающей реальный объект планирования, можно взять экспертную оценку значения целевой функции. Точность определения

$\tilde{\varphi}$ не оказывает влияния на полученное решение (можно, например, брать $r_0 = 0$) и лишь позволяет в большинстве случаев при счете на ЭВМ параметрической задачи сократить необходимый объем вычислений для получения оптимального плана.

Согласно [31] можно также утверждать, что если система ограничений (31.1)—(31.4) противоречива, то существует такой штраф r для задачи (31.6)—(31.9), при котором имеется оптимальный план выпуска продукции, и при этом суммарная корректировка, выражаемая величиной (e, y), минимальна.

Аналогичные утверждения могут быть сформулированы и для задачи (31.10)—(31.13).

Заметим, что величина (e, y) для задачи (31.6)—(31.9) определяет меру необоснованности предлагаемого проекта плана, а (c^*, z) для задачи (31.10)—(31.13) — меру минимально необходимого роста ресурсов.

Описанная схема решения задач перспективного и текущего планирования производства позволяет решать их при минимальной корректировке системы ограничений (в частности, если условия (31.1)—(31.4) непротиворечивы, то корректировка равна нулю). Задачи (31.6)—(31.9) и (31.10)—(31.13) являются задачами последовательной оптимизации. Одним из методов их решения, как уже было показано, является метод штрафных функций.

В задаче текущего планирования в случае несовместности ограничений определялось минимальное отклонение от проекта планового задания в натуральных измерителях. Возможны и другие подходы. Например, при несовместности условий определяется такой план, который позволяет объекту планирования выплачивать минимальную сумму штрафов за непоставленную потребителем продукцию или минимизируется снижение фондов материального поощрения и т. п. В этих случаях компоненты вектора e имеют соответствующий смысл.

Рассмотрим более подробно задачу перспективного планирования. Обеспечение минимума стоимости наращивания используемых ресурсов может привести к получению недопустимого с технической точки зрения варианта плана, в этом случае необходимо исследовать возможность корректировки компонент вектора z. Конечно, в систему ограничений задачи (31.10)—(31.13) можно ввести условия, лимитирующие наращивание отдельных видов ресурсов, и это позволило бы в случае совместности ограничений определить оптимальный выпуск продукции при минимально допустимом наращивании ресурсов. Однако, если множество решений пусто, то дальнейший анализ этой задачи провести затруднительно.

Выделим множество Q_1 компонент вектора z, для которых при решении задачи (31.10)—(31.13) получен неприемлемый рост ресурсов, и множетво Q_2 компонент, для которых рост допустим, или даже возможно наращивание в большей мере. Для множества Q_1 укажем необходимое уменьшение, а для Q_2 — допустимое дальнейшее увеличение используемых ресурсов. Внесение корректив может быть осуществлено при последовательном решении совокупности задач параметрического программирования. При этом сначала уменьшаем по параметру расход ресурса, количество потребления которого является наиболее неприемлемым. В результате решения либо достигается указанная граница допустимого расхода, либо будет получен результат, показывающий, что достижение этой границы невозможно при выполнении сформулированной системы условий задачи. Следует отметить, что допустимый расход определяется на основе экспертных оценок или приближенных расчетов и после параметрического анализа может быть признано возможным несколько большее значение рассматриваемой компоненты вектора z. В противном случае совместность условий может быть достигнута лишь за счет корректировки вектора планового задания.

На следующем шаге уменьшается по параметру расход следующего по приоритетности ресурса и т. д.

Введем следующие обозначения: $\bar{z}_i$ — допустимая верхняя граница увеличения расхода i-го ресурса, z_i^* — значение компоненты вектора z, определенное при решении задачи (31.10)—(31.13);

p_i — приоритет i-го ресурса. При определении последовательности уменьшения расхода ресурсов могут быть использованы, например, следующие правила:

1) если $c_i^* > c_j^*$, то $p_i > p_j$ $\forall i \in Q_1$, $\forall j \in Q_1$;

2) если $z_i^* - \bar{z}_i > z_j^* - \bar{z}_j$, то $p_i > p_j$ $\forall i \in Q_1$, $\forall j \in Q_1$;

3) если $c_i^*(z_i^* - \bar{z}_i) > c_j^*(z_j^* - \bar{z}_j)$, то $p_i > p_j$ $\forall i \in Q_1$, $\forall j \in Q_1$, где $p_i > p_j$ означает, что снижение расхода j-го ресурса производится после корректировки объемов потребления i-го ресурса.

Естественно, что можно формулировать и другие принципы разработки системы приоритетов, однако применимость какого-либо принципа может быть определена на основе анализа конкретной экономической ситуации.

При решении последовательности параметрических задач для скорректированных компонент вектора z объемы потребляемых ресурсов фиксируются, исходя из решения предыдущих задач. Для ресурса, расход которого уменьшается по параметру, формулируется ограничение:

$$0 \leqslant \bar{z}_{i_0} \leqslant z_{i_0} = z^*_{i_0} - \lambda, \tag{31.14}$$

где $i_0 \in Q_1 \setminus Q_1^*$ (Q_1^* — множество ресурсов, для которых уже была проведена корректировка вектора z) — номер ресурса, для которого решается параметрическая задача; λ — параметр ($\lambda \geqslant 0$).

Для остальных же компонент вектора z формулируются условия:

$$z_i \leqslant z_i^*, \quad i \in Q_1 \setminus Q_1^* \setminus \{i_0\}, \tag{31.15}$$

$$z_i = z_i^\lambda, \quad i \in Q_1^*, \tag{31.16}$$

$$0 \leqslant z_i \leqslant \bar{z}_i, \quad i \in Q_2, \tag{31.17}$$

где z_i^λ — скорректированное при решении параметрической задачи значение i-й компоненты вектора z.

Функцию цели поставим в виде: найти

$$\max \{(c,\ x) + (\Delta,\ w) - (c^*,\ z)\}. \tag{31.18}$$

Решение задач (31.18), (31.11)—(31.17) позволит определить возможность снижения расхода i_0-го ресурса до максимального допустимого значения $\underline{z}_{i_0}$.

Аналогичным образом корректируется решение задачи текущего планирования (31.6)—(31.9), если минимальная корректировка не является допустимой.

31.3. Построение областей эффективных решений. Рассмотрим случай, когда возможным является и большее наращивание компонент векторов y или z, чем минимально допустимое.

Наиболее подвижным параметром при текущем планировании является выпуск продукции, а при перспективном — расход ресурсов. Для этих параметров могут быть определены границы допустимого изменения. Под верхней границей параметра не всегда, по-видимому, целесообразно понимать максимально возможное значение; более содержательным может быть сопоставление изменения подвижного параметра с критерием оптимальности и определение такого значения, при котором рост параметра до этого значения улучшает критерий, а дальнейшее наращивание не дает эффекта. Для определенного таким образом значения используется термин *максимально целесообразный уровень.*

На рис. 31.1 иллюстрируется построение области допустимых решений ($PETRCD$) при изменении подвижного параметра (S) от минимально допустимого (m) до максимально целесообразного (M) уровня в случае максимизации функции цели (F).

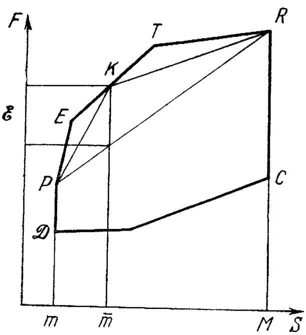

Рис. 31.1.

Каждому значению параметра соответствует множество решений с разными значениями функции цели. Ломаной линии $PETR$ соответствуют планы, являющиеся самыми эффективными при изменении параметра от m до M. Планы, определяемые точкой P, в случае текущего планирования получаются при решении задачи (31.6)—(31.9), а при перспективном планировании — задачи (31.10)—(31.13), если минимально необходимые значения (e, y) и (c^*, z) были допустимыми. В противном случае планы, определяемые точкой P, отыскиваются при решении рассмотренной ранее последовательности параметрических задач. Реализация схемы последовательной оптимизации дает возможность из всех планов, соответствующих значению m анализируемого параметра, отобрать те, которые обеспечивают максимум выбранного критерия. Использование аппарата параметрического программирования позволяет построить ломаную $PETR$ и соответствующие ей планы выпуска продукции.

По-видимому, получить всю совокупность планов, определяемых ломаной $PETR$, в большинстве случаев затруднительно в связи с большим объемом регистрируемой при этом информации. Поэтому можно, например, построить ломаную $PETR$, а затем для выбранного значения параметра $\bar{m}$, $m \leqslant \bar{m} \leqslant M$ рассчитать соответствующий план на ЭВМ. Однако при этом теряется возможность просто и быстро генерировать планы выпуска продукции. Рациональным с точки зрения создания гибкой процедуры корректировки плановых расчетов является построение процедуры ручного счета с малым объемом вычислений.

Обозначим через ω_1 план, соответствующий точке P, через ω_2 — точке R. Выпуклая линейная комбинация ω_1 и ω_2 является допустимой относительно сформулированной системы ограничений и имеет значение функции цели, соответствующее прямой PR (рис. 31.1).

Если планы, получаемые в виде выпуклой линейной комбинации ω_1 и ω_2, намного уступают в эффективности оптимальным (значение ε велико), то всегда можно построить такую совокупность базовых точек, для которых ε не будет превышать наперед заданной величины. Например, выпуклая комбинация ω_1 и ω_3, ω_3 и ω_2, где ω_3 определяется точкой K, позволяет получить планы, более близкие к оптимальным. Значит, для всякого значения рассматриваемого параметра может быть рассчитан достаточно близкий к оптимальному выпуск продукции — как выпуклая линейная комбинация базовых планов. Пусть $m \leqslant m^* \leqslant \bar{m}$, тогда $\omega^* = \alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_3$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, есть множество планов, значение функции цели которых определяется прямой PK.

31.4. Оптимизация параметров производства в задачах перспективного планирования. Решение задачи перспективного планирования на основе использования модели (31.10)—(31.13) позволяет определить минимально необходимый рост используемых ресурсов, но в этом случае остается невыясненным способ ликвидации этого дефицита. А именно, следует ли увеличить объем потребления лимитирующих производство ингредиентов, или экономически оправданным является внедрение технологий с меньшими удельными затратами ресурсов? Сформулированная задача может быть достаточно просто решена при условии, что коэффициенты ресурсоемкости с приемлемой точностью уменьшаются в одно и то же число раз для всех элементов строки матрицы B. Действительно, в этом случае нетрудно рассчитать экономию ресурсов за счет совершенствования технологии; сравнение же затрат на увеличение потребления дефицитных ингредиентов производства и на снижение удельной ресурсоемкости выпуска продукции позволяет выбрать наилучший вариант. В более общем случае (коэффициенты ресурсоемкости для разных видов продукции изменяются не в равной мере) оптимальный план не столь очевиден.

Будем полагать, что наращивание пропускной способности оборудования и снижение удельных затрат трудовых и природных ресурсов осуществляется за счет реализации не особенно крупных мероприятий, каждое из которых в достаточно малой степени изменяет ресурсоемкость производства продукции. В этом случае характер изменения параметров объекта планирования близок к непрерывному. К тому же расширение производства осуществляется за счет введения дополнительных машин или вообще каких-либо иных видов оборудования, технически мало отличающихся от прежних, а вновь привлекаемые трудовые и природные ресурсы имеют близкие качественные характеристики с ранее использовавшимися, что позволяет аппроксимировать затраты линейной функцией оптимизируемых величин. Сформулированные допущения дают возможность описывать объект планирования наиболее простыми моделями линейного программирования, что делает более наглядным изложение предлагаемого подхода к идентификации параметров производства, хотя сам подход применим и в моделях, описывающих достаточно сложные условия функционирования экономических систем.

При решении задачи (31.10)—(31.13) определяется оптимальный план выпуска продукции ($\overset{*}{x}{}_j^t$ — производство j-го вида продукции в t-й период времени) и необходимый рост ресурсов ($\overset{*}{z}{}_i^t$ — дефицит i-го вида ресурса в t-й период времени).

Расширение ресурсных возможностей объекта планирования осуществляется за счет реализации совокупности мероприятий $k \in K$ в периоды времени $t \in T$ с интенсивностью v_k^t. При $v_k^t = 1 \quad \forall k \in K,\ t \in T$ обеспечивается изменение удельной ресурсоемкости на величину γ_{ijh} и (или) объема лимитирующих выпуск продукции ингредиентов производства на σ_{ik}.

Интенсивность использования каждого мероприятия может быть представлена как интенсивность его использования в предшествующий и изменение в рассматриваемый периоды времени:

$$v_k^t - v_k^{t-1} - \overline{\Delta}_k^t + \Delta_k^t = 0,$$

$$v_k^t \geqslant 0, \quad \overline{\Delta}_k^t \geqslant 0, \quad \Delta_k^t \geqslant 0, \quad k \in K, \quad t \in T, \tag{31.19}$$

где $\overline{\Delta}_k^t$ — увеличение, а Δ_k^t — уменьшение интенсивности использования мероприятий.

В каждый момент времени и за весь плановый период в целом объект планирования имеет ограничения на допустимое расширение своих ресурсных возможностей:

$$\sum_{k \in K} \left(\overline{g}_{ks}^t \overline{\Delta}_k^t + g_{ks}^t \Delta_k^t\right) \leqslant m_s^t, \qquad s \in S,\ t \in T, \tag{31.20}$$

$$\sum_{k \in K, t \in T} \left(\overline{g}_{ks}^t \overline{\Delta}_k^t + g_{ks}^t \Delta_k^t\right) \leqslant \overline{m}_s, \qquad s \in S, \tag{31.21}$$

где S — множество лимитирующих развитие объекта планирования ресурсов, $\overline{g}_{ks}^t$, g_{ks}^t — удельные, а m_s^t, $\overline{m}_s$ — суммарные капитальные вложения, объемы строительно-монтажных работ и т. д.

Следует отметить, что на некоторые ресурсы, используемые при производстве продукции, могут быть введены условия допустимого изменения их во времени. Например, невозрастающие численности некоторых категорий производственного персонала по причине дефицита трудовых ресурсов:

$$\sum_{k \in K, j \in J} \gamma_{ijk} x_j^{*t} \left(\overline{\Delta}_k^t - \Delta_k^t\right) - \sum_{k \in K} \sigma_{ik} \left(\overline{\Delta}_k^t - \Delta_k^t\right) \geqslant 0,$$
$$i \in J_1, \quad t \in T, \tag{31.22}$$

где J_1 — множество категорий персонала, численность которых не должна возрастать во времени.

Другим примером может быть тот факт, что некоторые ресурсы в связи с высокими затратами и большими сроками реализации мероприятий по уменьшению их количества являются маломобильными, т. е. при кратковременном снижении потребности в них наличие такого рода ресурсов сохраняется в прежнем объеме. Примером маломобильного ресурса может быть оборудование, которое, как правило, не демонтируется на те периоды времени, когда оно не загружено, если в дальнейшем предполагается его использование. В этом случае должны выполняться условия:

$$\Delta_k^t = 0, \quad k \in K_1, \quad t \in T, \tag{31.23}$$

где K_1 — множество мероприятий, для которых до решения задачи очевидна нецелесообразность снижения интенсивности их использования во времени.

Отметим также, что после внедрения некоторых мероприятий, направленных на совершенствование технологических процессов, снижение коэффициентов ресурсоемкости происходит во все периоды времени после их внедрения. Т. е. в этом случае также должны выполняться условия вида (31.23).

Кроме описанных ограничений может быть учтен и ряд других требований, таких, как дискретный характер наращивания пропускных способностей производств, определенная очередность реализации некоторых мероприятий (например, после замены устаревшего оборудования новыми агрегатами нельзя увеличить производственную мощность объекта планирования за счет реконструкции уже демонтированного оборудования) и т. п.

И, наконец, интенсивность реализуемых мероприятий по расшивке узких мест должна быть такой, чтобы увеличение ресурсных возможностей было не меньше, чем $\overset{*}{z}{}_i^t$. Однако допустимого решения может и не быть, поэтому в рамках сформулированной задачи следует предусмотреть минимально возможную корректировку системы условий задачи путем расчета дисбаланса между допустимым и необходимым расширением ресурсных возможностей объекта планирования (обозначим эти величины $\tilde{v}_i^t$):

$$\sum_{k\in K, j\in J} \gamma_{ijk}\overset{*}{x}{}_j^t v_k^t + \sum_{k\in K} \sigma_{ik} v_k^t - \overset{*}{z}{}_i^t + \tilde{v}_i^t \geqslant 0,$$
$$i \in J, \quad t \in T. \tag{31.24}$$

При построении функции цели реализуется процедура последовательной оптимизации: минимизируются значения $\tilde{v}_i^t$ (если ограничения (31.19)—(31.24) совместны, то величины $\tilde{v}_i^t$ будут равны нулю) и из всех планов, обеспечивающих этот минимум, выбирается решение с минимальными дисконтированными суммарными затратами. Выпишем функцию цели:

$$\min\left\{\sum_{k\in K, t\in T} \left(h_k^t v_k^t + \bar{h}_k^t \bar{\Delta}_k^t + \tilde{h}_k^t \Delta_k^t\right) + \tilde{r} \sum_{i\in J, t\in T} \tilde{c}_i^t \tilde{v}_i^t\right\}, \tag{31.25}$$

где h_k^t — удельные текущие затраты, $\bar{h}_k^t$, $\tilde{h}_k^t$ — удельные капитальные вложения на изменение интенсивности использования мероприятий, приведенные к текущим затратам, $\tilde{c}_i^t$ — величины, задающие меру приоритетности снижения дисбалансов, $\tilde{v}_i^t$, $\tilde{r}$ — штрафная константа.

Решение задачи (31.19)—(31.25) позволяет определить возможность выполнения проектного задания по выпуску продукции за счет реализации оптимального набора мероприятий, расширяющих ресурсные возможности экономической системы. Если имеются отличные от нуля $\tilde{v}_i^t$, то либо необходимо разработать дополнительные мероприятия, либо обеспечить планируемый выпуск не представляется возможным и следует вновь решить задачу оптимального планирования выпуска продукции, введя в систему условий (31.11)—(31.13) ограничения на допустимое изменение компонент вектора z, а соотношения (31.13) заменить условиями (31.7). Однако, если даже необходимое расширение ресурсных возможностей объекта планирования является и допустимым, а все соотношения (31.24) выполняются в виде равенств, то тем не менее нужно вновь оптимизировать производство продукции в связи с тем, что изменяются коэффициенты ресурсоемкости, а это, как правило, приводит и к изменению оптимального плана выпуска продукции.

31.5. Выводы. Изложенный подход к задаче планирования производства был использован при построении экономико-математических моделей планирования металлургического производства [85] и показал свою эффективность [8].

Достоинством предложенной схемы модельного описания задач планирования производства, на наш взгляд, является то, что, во-первых, ограничения сформулированной задачи допускаются противоречивыми. Во-вторых, увеличивается «живучесть» полученных расчетов, т. е. не требуется перерасчет задачи при изменениях подвижных параметров. В-третьих, определяется область допустимого (или эффективного) изменения параметра. В-четвертых, если существует свобода выбора анализируемого показателя, то всегда можно определить «цену» принимаемого решения, т. е. указать те потери или тот выигрыш, которые сопровождают выбор какого-то одного из множества всех конкурирующих значений рассматриваемого параметра. Это особенно ценно в том случае, когда анализируемый показатель является и основополагающим при принятии решения (например, объем используемых ресурсов в задачах перспективного планирования). И, наконец, преимущества использования процедуры ручного счета при корректировке планов определяются как перечисленные ранее причинами, так и сугубо психологическими соображениями, что в целом способствует более успешному внедрению методов оптимального планирования в экономике.

В заключение отметим, что реализация предлагаемого подхода при решении задач перспективного планирования производства позволяет рассчитать не только оптимальный план выпуска продукции, но и траекторию развития объекта планирования с определением экономически целесообразных и технологически допустимых параметров используемых технологий и рационального объема используемых ресурсов.

§ 32. Анализ несобственных моделей в задачах объемно-календарного планирования машиностроительного производства

Рассматривается задача оптимального объемно-календарного планирования деятельности крупного машиностроительного предприятия с индивидуальным и мелкосерийным типом производства. Для решения этой задачи разрабатывается система оптимального объемно-календарного планирования, позволяющая принимать решения в реальном масштабе времени и в режиме диалога. Подробное изложение основных элементов этой системы приведено в [38].

Основная экономико-математическая модель задачи имеет следующий вид. Найти

$$\max \sum_{q\in Q} \sum_{s=1}^{T} c_q^s y_q^s \tag{32.1}$$

при условиях

$$\sum_{q\in Q} \sum_{s\in 1}^{T} a_{iq}^{\tau s} y_q^s \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in J,\ \forall \tau \in \mathrm{N}_T, \tag{32.2}$$

$$\sum_{q\in Q_j} \sum_{s\in S^t} r_q^s y_q^s \geqslant R_j^t \quad \forall j \in J,\ \forall t \in \mathrm{N}_4, \tag{32.3}$$

$$\sum_{s=1}^{T} y_q^s \leqslant A_q \quad \forall q \in Q, \tag{32.4}$$

$$\alpha_q^s \leqslant y_q^s \leqslant \beta_q^s \quad \forall s \in N_T,\ \forall q \in Q, \tag{32.5}$$

где

T — период планирования (как правило, год);

t — индекс квартала периода планирования;

s — индекс месяца, в котором возможен выпуск продукции;

τ — индекс текущего месяца производства;

$I = \mathrm{N}_n$ — множество различных типов оборудования;

$J = \mathrm{N}_m$ — набор номенклатур выпускаемой продукции;

S^t — набор месяцев, входящих в t-й квартал;

Q — множество заказов на период планирования (портфель заказов), разбитых на множества заказов отдельных номенклатур Q_j, $\bigcup\limits_{j \in J} Q_j = Q$;

A_q — верхняя граница объема выпуска изделий q-го заказа;

R_j^t — планируемый объем выпуска продукции j-ой номенклатуры в t-ом квартале (в соответствующей единице измерения);

Φ_i^τ — действительный фонд рабочего времени i-го типа оборудования в месяце τ;

α_q^s, β_q^s — соответственно нижняя и верхняя границы объемов выпуска изделий q-го заказа в s-ом месяце;

$a_{iq}^{\tau s}$ — норма затрат i-го типа оборудования на изготовление одного комплекта q-го заказа в месяце τ, при условии, что изделие будет выпущено в s-ом месяце;

r_q^s — вклад q-го заказа в выполнение планового показателя j-ой номенклатуры в s-ом месяце, входящем в t-й квартал;

c_q^s — цена одного комплекта q-го заказа при условии, что изделие будет выпущено в s-ом месяце;

y_q^s — искомые объемы выпуска изделий q-го заказа в s-ом месяце.

Функция цели (32.1) — суммарная стоимость произведенной за период планирования продукции; ограничения (32.2) обеспечивают месячную загрузку каждого вида оборудования в заданных пределах, ограничения (32.3) обеспечивают поквартальное выполнение плановых показателей производства продукции по каждой номенклатуре. Условия (32.4) и (32.5) накладывают ограничения на количество изготовляемых изделий каждого заказа в целом за период планирования и по каждому месяцу.

Оптимальный план задачи (32.1)—(32.5) обозначим $\{\tilde{y}_q^s\}$. Он позволяет сравнительно точно отслеживать ход производства, с его помощью можно оценить объемы выпуска продукции в каждом месяце и в течение периода планирования в целом

$$\widetilde{C} = \sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} c_q^s \widetilde{y}_q^s,$$

объемы выпуска продукции по каждой номенклатуре

$$\widetilde{R}_j^t = \sum_{q \in Q_j} \sum_{s \in S^t} r_q^s \widetilde{y}_q^s \quad \forall j \in \mathrm{N}_m, \forall t \in \mathrm{N}_4,$$

а также величину загрузки основных видов оборудования по месяцам периода планирования с указанием изделий, обеспечивающих эту загрузку,

$$\Phi_i^\tau - \sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} a_{iq}^{\tau s} \widetilde{y}_q^s \quad \forall i \in \mathrm{N}_n, \ \forall \tau \in \mathrm{N}_T.$$

Для целей планирования реального производства размерность данной задачи линейного программирования достаточно велика. Число существенных ограничений (32.2)—(32.4) достигает 4000, число основных переменных — свыше 10 000, а симплекс-матрица содержит около полумиллиона ненулевых элементов. Вместе с тем приведенная модель не содержит целого ряда условий, влияющих на практике на ход производства, таких как наличие сырья, полуфабрикатов, степень подготовки производства, возможности кооперации и других.

Таким образом, задача (32.1)—(32.5) содержит минимальное число ограничений, необходимых для адекватного описания хода производственного процесса, и является задачей большой размерности. Отсутствующие ограничения могут быть оценены после получения плана производства.

Как показал опыт решения приведенной задачи для ряда предприятий, на начальной стадии ограничения являются несовместными. При этом, ввиду больших объемов исходной технико-экономической информации, выявить причины несовместности часто бывает весьма затруднительно. Поэтому нецелесообразно решать задачу (32.1)—(32.5) сразу, а необходимо организовать процедуру последовательного выявления и разрешения причин несовместности.

На первом этапе решаются следующие узловые вопросы оптимального объемно-календарного планирования:

1) наличие такого количества заказов, что имеется возможность выполнения планов производства по отдельным номенклатурам и по предприятию в целом;

2) наличие таких фондов рабочего времени имеющихся видов оборудования, которые обеспечили бы выполнение производственной программы в целом.

Для решения этих вопросов предлагается решать статическую задачу объемно-календарного планирования производства, имеющую сравнительно небольшие размеры: найти

$$\max \sum_{q \in Q} c_q x_q \tag{32.6}$$

при условиях

$$\sum_{q \in Q} a_{iq} x_q \leqslant F_i \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \tag{32.7}$$

$$\sum_{q \in Q_j} r_q x_q \geqslant R_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \tag{32.8}$$

$$0 \leqslant x_q \leqslant A_q \quad \forall q \in Q, \tag{32.9}$$

где $a_{iq} = \sum_{\tau=1}^{T} a_{iq}^{\tau s}$, $F_i = \sum_{\tau=1}^{T} \Phi_i^{\tau}$, $R_j = \sum_{t=1}^{4} R_j^t$, $x_q = \sum_{s=1}^{T} y_q^s$. Последнее равенство раскрывает взаимосвязь решений статической и динамической задач. Как правило, и эта задача оказывается несовместной, однако здесь причины несовместности можно достаточно четко выяснить, оценить меру несовместности и в некоторых случаях наметить пути разрешения несовместности. С этой целью решается следующая совместная задача: найти

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i + \sum_{j=1}^{m} v_j \lambda_j + w\mu \right\} \tag{32.10}$$

при условиях

$$\sum_{q \in Q} a_{iq} x_q - \varphi_i \leqslant F_i \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \tag{32.11}$$

$$\sum_{q \in Q_j} r_q x_q + \lambda_j \geqslant R_j \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \tag{32.12}$$

$$\sum_{q \in Q} c_q x_q + \mu \geqslant C, \tag{32.13}$$

$$0 \leqslant x_q \leqslant A_q \quad \forall q \in Q, \tag{32.14}$$

$$\varphi_i \geqslant 0, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall j \in \mathbf{N}_m, \tag{32.15}$$

где u_i, v_j, w — достаточно большие числа, C — планируемая стоимость произведенной продукции. Часть причин несовместности может устранить только ЛПР (лицо, принимающее решение). Так, если окажется, что для некоторых j в оптимальном плане задачи (32.10)—(32.14) $\tilde{\lambda}_j \geqslant 0$, то это означает, что план производства j-ой номенклатуры не обеспечен заказами в должной мере (на величину $\tilde{\lambda}_j$). Для решения этого противоречия необходимо либо ввести в рассмотрение новые заказы, либо скорректировать величину R_j. Аналогично, если $\tilde{\mu} > 0$, то не хватает заказов для выполнения плана производства в денежном выражении. Разрешение этих противоречий должно проводиться в режиме диалога ЭВМ и ЛПР.

Рассмотрим случай, когда некоторые φ_i положительны, что означает отсутствие необходимых для выполнения производственной программы фондов рабочего времени i-го вида оборудования. Это может произойти по различным причинам, одной из которых является несовершенство исходной экономико-математической модели, которая не учитывает взаимозаменяемость некоторых видов оборудования. Для последующего анализа необходимо ввести это условие в модель. Поскольку представляет интерес получить укрупненную оценку возможности выполнения производственной программы, рассмотрим одну из наиболее простых моделей. Все множество видов оборудования $I = \mathrm{N}_n$ разобьем на непересекающиеся подмножества взаимозаменяемых видов I_k, $\bigcup\limits_k I_k = I$. Для каждой группы взаимозаменяемых оборудований выберем наиболее прогрессивный вид и сведем трудоемкости изготовления изделий на видах оборудования данной группы к трудоемкости изготовления на наиболее прогрессивном оборудовании:

$$a_{iq} \to b_{kq} \quad \forall i \in I_k.$$

Суммарные фонды рабочего времени данной группы видов оборудования также могут быть вычислены по формуле

$$F_k^* = \sum_{i \in I_k} \nu_i F_i,$$

где коэффициенты ν_i получены либо на основе экспертных оценок, либо на основе обработки статистических наблюдений. В этом случае условие (32.11) заменяется на

$$\sum_{q \in Q} b_{kq} x_q - \psi_k \leqslant F_k^* \quad \forall k \in \mathrm{N}_n. \qquad (32.11)'$$

Если в оптимальном плане задачи (32.10), (32.11)—(32.15)

$\tilde{\psi}_k = 0$ для всех k, то возникает задача оптимального распределения обработки заказов на видах оборудования по группам, однако эта задача существенно проще начальной.

Случай, когда для некоторых групп $\tilde{\psi}_k > 0$ означает, что фондов рабочего времени имеющихся видов оборудования недостаточно для выполнения производственной программы и $\tilde{\psi}_k$ — недостающие фонды. Имеется возможность определения тех заказов, которые необходимо исключить из производства для того, чтобы уложиться в имеющиеся фонды рабочего времени. Для этого в задачу достаточно ввести условие $\psi_k = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}_n$ и решить ее еще раз.

Как правило, этой информации оказывается достаточно для того, чтобы ЛПР было в состоянии разрешить возникшее противоречие. Рассмотренная статическая задача по объему перерабатываемой информации, количеству учитываемых условий, степени детализации производства соответствует традиционным способам составления проектов годовых производственных планов на машиностроительных предприятиях (когда циклы изготовления изделий не учитываются). Полученный на этом этапе оптимальный план $\{x_q^*\}$ принимается к выполнению. Следует подчеркнуть, что этот план составлен таким образом, что имеющиеся годовые производственные фонды предприятия в состоянии обеспечить выполнение намеченных плановых заданий как по отдельным номенклатурам, так и в целом по предприятию. После этапа составления статического плана решается задача распределения полученных плановых заданий по календарным периодам с учетом циклов изготовления выпускаемых изделий. В принципе такую задачу можно ставить и как неоптимизационную, т. е. рассматривать следующую задачу распределения годового плана производства по единичным периодам: найти любое допустимое решение системы

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} c_q^s y_q^s \geqslant C^*, \tag{32.16}$$

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} a_{iq}^{\tau s} y_q^s \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall \tau \in \mathbf{N}_T, \tag{32.17}$$

$$\sum_{q \in Q_j} \sum_{s=1}^{T} r_q y_q^s \geqslant R_j^* \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \tag{32.18}$$

$$\sum_{s=1}^{T} y_q^s = x_q^* \quad \forall q \in Q, \tag{32.19}$$

$$\alpha_q^s \leqslant y_q^s \leqslant \beta_q^s \quad \forall q \in Q,\ \forall s \in \mathbf{N}_T, \tag{32.20}$$

где $C^* = \sum_{q \in Q} c_q x_q^*$, $R_j^* = \sum_{q \in Q_j} r_q x_q^*$. Опыт решения производственных задач показал, что, как правило, такие задачи являются неразрешимыми, т. е. система (32.16)—(32.20) не имеет ни одного допустимого решения, причем основная причина несовместности заключается не столько во введении ограничений (32.20), сколько во введении ограничений (32.17).

Если же эту задачу рассматривать как оптимизационную, т. е. в виде: найти

$$\max \sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} c_q y_q^s \tag{32.21}$$

при условиях (32.17), (32.4), (32.5), то оказывается, что она, как правило, совместна, но оптимальное значение функции цели (32.21), которое обозначим через C_1^*, будет существенно меньше, чем C^*, т. е. $C_1^* < C^*$. Кроме этого, если оптимальный план этой задачи подставить в (32.18), то планы производства по некоторым номенклатурам не будут выполняться. Можно рассмотреть следующую задачу. Найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{T} u_i^\tau \varphi_i^\tau \tag{32.22}$$

при условиях

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} a_{iq}^{\tau s} y_q^s - \varphi_i^\tau \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in \mathbf{N}_n,\ \forall \tau \in \mathbf{N}_T, \tag{32.23}$$

$$\varphi_i^\tau \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n,\ \forall \tau \in \mathbf{N}_T \tag{32.24}$$

и условиях (32.16), (32.18)—(32.20), где u_i^τ — достаточно большие положительные числа. Полученный оптимальный план такой задачи достаточно точно описывает производственную ситуацию: в начале периода планирования требуются дополнительные производственные мощности для оборудования заготовительной стадии производства, а в конце — для механообработки и сборки для выполнения плановых заданий. Получающееся несоответствие между решениями статической и динамической задач, в частности, может быть объяснено способами формирования исходной технико-экономической информации для динамической задачи. Соответствующие службы предприятия готовят следующие разделы исходной информации:

1) объем и номенклатура незавершенного производства на начало периода планирования;

2) состояние технической подготовки производства;

3) обеспеченность сырьем и полуфабрикатами;

4) возможности кооперации со смежными предприятиями;

5) технологические маршруты изготовления изделий.

При этом, если при решении статической задачи эта информация учитывалась в агрегированном виде (в целом на период планирования), то при решении динамической задачи она должна быть развернута во времени. В экономико-математической модели (32.1)—(32.5) эта информация учитывается следующим образом:

а) объем и номенклатура незавершенного производства влияют на сроки изготовления отдельных заказов и на значения ряда коэффициентов $a_{iq}^{\tau s}$;

б) состояние технической подготовки производства и обеспеченность сырьем, полуфабрикатами, комплектующими изделиями влияют на сроки изготовления заказов, что учитывается не только путем создания соответствующих значений α_q^s и β_q^s, но и путем введения ограничений (вместо (32.4)) для некоторых q:

$$\sum_{s=t_q}^{T_q} y_q^s \leqslant A_q,$$

где $[t_q, T_q]$ — интервал времени, в который возможен выпуск q-го заказа;

в) возможности кооперации со смежными предприятиями влияют на величины Φ_i^τ;

г) самое существенное влияние оказывает информация о технологических циклах изготовления изделий, так как она полностью определяет значения всех коэффициентов $a_{iq}^{\tau s}$.

В силу того, что все эти разделы исходной информации могут быть определены неоднозначно, можно ставить вопрос об оптимальном содержании этой информации. Для этого нужно, чтобы соответствующие службы предприятия генерировали такую информацию, при которой предприятие в целом функционировало бы оптимальным образом. В частности, выбор технологических маршрутов изготовления изделий необходимо увязывать с возможной загрузкой оборудования в различные периоды. По всей вероятности, такая увязка невозможна в полном объеме на этапе формирования исходной информации, так как для этого необходимо знать план производства. Поэтому целесообразно организовать итерационную процедуру принятия решений при оптимальном объемно-календарном планировании, когда последовательно уточняются план производства и информация, его определяющая.

Из всех разделов исходной информации наиболее существенное влияние на совместность решаемых задач (имеется возможность коррекции этой информации внутри предприятия) оказывает информация о незавершенном производстве и о технологических циклах изготовления изделий. Экономико-математическая модель определения оптимальных объемов незавершенного производства приведена в [38]. Поэтому ниже будет рассматриваться только случай коррекции информации о технологических циклах (остальные разделы информации корректируются существенно проще).

Одним из способов учета многовариантности составления матрицы технологического маршрута является построение соответствующих наборов вариантов. Пусть K_q — множество вариантов матрицы технологического маршрута изготовления изделий q-го заказа. В этом случае экономико-математическая модель задачи будет иметь вид: найти

$$\max \sum_{q\in Q} \sum_{s=1}^{T} c_q^s y_q^s \tag{32.1}$$

при условиях

$$\sum_{q\in Q} \sum_{s=1}^{T} \sum_{k\in K_q} a_{iq}^{\tau s}(k)\, u_{qk}^s y_q^s \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in \mathrm{N}_n, \ \forall \tau \in \mathrm{N}_T, \tag{32.25}$$

$$\sum_{k\in K_q} u_{qk}^s = 1 \quad \forall q \in Q, \quad \forall s \in \mathrm{N}_T, \tag{32.26}$$

$$u_{qk}^s = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \forall q \in Q, \quad \forall s \in \mathrm{N}_T, \quad \forall k \in K_q, \tag{32.27}$$

и условиях (32.3)—(32.5), где $\{a_{iq}^{\tau s}(k)\}$ — матрица k-го варианта технологического маршрута изготовления изделия q-го заказа, которое будет выпущено в s-й месяц.

Однако такая постановка задачи имеет ряд существенных недостатков: во-первых, необходима большая и трудоемкая работа технологов по выработке вариантов технологических маршрутов; во-вторых, не удается отобразить все многообразие возможных вариантов выбора матриц $\{a_{iq}^{\tau s}(k)\}$; в-третьих, полученная задача относительно трудно решаемая; в-четвертых, как правило, эта задача оказывается несовместной.

Поэтому более целесообразно рассматривать непрерывный аналог этой задаче, когда матрица коэффициентов $\{a_{iq}^{\tau s}\}$ заменяется матрицей переменных

$$\{z_{iq}^{\tau s}\} = P_q^s.$$

В этом случае условия (32.25)—(32.27) заменяются на следующие:

$$\sum_{q\in Q}\sum_{s=1}^{T} z_{iq}^{\tau s} y_q^s \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i\in \mathrm{N}_n,\ \forall \tau\in \mathrm{N}_T, \tag{32.28}$$

$$\{z_{iq}^{\tau s}\} = P_q^s \in M_q^s \quad \forall q\in Q,\ \forall s\in \mathrm{N}_T, \tag{32.29}$$

где M_q^s — некоторые множества допустимых значений для матриц P_q^s. Наиболее часто используется следующая конструкция таких множеств

$$M_q^s = \left\{ z_{iq}^{\tau s}\colon\ \underline{a}_{iq}^{\tau s} \leqslant z_{iq}^{\tau s} \leqslant \bar{a}_{iq}^{\tau s},\ \sum_{\tau=1}^{T} z_{iq}^{\tau s} = a_{iq} \right\}. \tag{32.30}$$

Можно рассмотреть и другие конструкции множеств M_q^s, задаваемых более сложными системами линейных неравенств (что обусловлено способами решения оптимизационных задач), однако необходимо отметить, что полнота отображения всей совокупности значений при этом не достигается. Этот факт можно объяснить следующим образом. Технологический маршрут изготовления сложного изделия может быть отображен в виде сетевого графика, где продолжительность работ — время обработки изделия на некотором оборудовании. Время начала и окончания работ зависит от состояния дел на других ребрах графика и может изменяться по достаточно сложным правилам.

Для того, чтобы добиться совместности динамической задачи, рассмотрим ее в следующем виде. Найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{T} \varphi_i^\tau u_i^\tau \tag{32.31}$$

при условиях

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} z_{iq}^{\tau s} y_q^s - \varphi_i^\tau \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall \tau \in \mathbf{N}_T, \tag{32.32}$$

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} c_q^s y_q^s \geqslant C^*, \tag{32.33}$$

$$\sum_{q \in Q_j} \sum_{s=1}^{T} r_q^s y_q^s \geqslant R_j^* \quad \forall j \in \mathbf{N}_m, \tag{32.34}$$

$$\sum_{s=1}^{T} y_q^s = x_q^* \quad \forall q \in Q, \tag{32.35}$$

$$\alpha_q^s \leqslant y_q^s \leqslant \beta_q^s \quad \forall q \in Q, \ \forall s \in \mathbf{N}_T, \tag{32.36}$$

$$\varphi_i^\tau \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall \tau \in \mathbf{N}_T, \tag{32.37}$$

$$\sum_{\tau=1}^{T} z_{iq}^{\tau s} = a_{iq} \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall q \in Q, \ \forall s \in \mathbf{N}_T, \tag{32.38}$$

$$\underline{a}_{iq}^{\tau s} \leqslant z_{iq}^{\tau s} \leqslant \bar{a}_{iq}^{\tau s} \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall q \in Q, \ \forall \tau, s \in \mathbf{N}_T. \tag{32.39}$$

Для решения такой задачи можно использовать следующую итерационную процедуру. На начальном шаге фиксируются

$$z_{iq}^{\tau s}(0) = a_{iq}^{\tau s}$$

и решается задача (32.31)—(32.37); полученное оптимальное решение обозначим $\{y_q^s(0)\}$. Пусть на k-ом шаге определены оптимальные

$$\{z_{iq}^{\tau s}(k)\}, \ \{y_q^s(k)\}.$$

Тогда на $k+1$-м шаге для определения оптимальных $\{z_{iq}^{\tau s}(k+1)\}$ решается следующая задача. Найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{T} u_i^\tau \varphi_i^\tau \tag{32.40}$$

при условиях

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} y_q^s(k)\, z_{iq}^{\tau s} - \varphi_i^\tau \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in \mathbf{N}_n, \ \forall \tau \in \mathbf{N}_T, \tag{32.41}$$

$$\sum_{\tau=1}^{T} z_{iq}^{\tau s} = a_{iq} \quad \forall i \in \mathrm{N}_n,\ \forall q \in Q, \tag{32.42}$$

$$\underline{a}_{iq}^{\tau s} \leqslant z_{iq}^{\tau s} \leqslant \bar{a}_{iq}^{\tau s} \quad \forall i \in \mathrm{N}_n,\ \forall q \in Q,\ \forall \tau, s \in \mathrm{N}_T. \tag{32.43}$$

При этом точка $\{z_{iq}^{\tau s}(k)\}$ используется в качестве начального приближения. Полученный оптимальный план обозначим $\{z_{iq}^{\tau s}(k+1)\}$, оптимальное значение функции цели — $D_1(k+1)$. Затем решается задача: найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{T} u_i^\tau \varphi_i^\tau \tag{32.44}$$

при условиях

$$\sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} z_{iq}^{\tau s}(k+1)\, y_q^s - \varphi_i^\tau \leqslant \Phi_i^\tau \quad \forall i \in \mathrm{N}_n,\ \forall \tau \in \mathrm{N}_T, \tag{32.45}$$

а также условиях (32.33)—(32.36). Точка $\{y_q^s(k)\}$ используется в качестве начального приближения. Оптимальное решение этой задачи обозначим $\{y_q^s(k+1)\}$, а оптимальное значение функции цели — $D_2(k+1)$. При проведении практических расчетов можно считать, что получено удовлетворительное решение, если выполняется соотношение $D_2(k) - D_2(k+1) < \varepsilon$, где ε — достаточно малая величина.

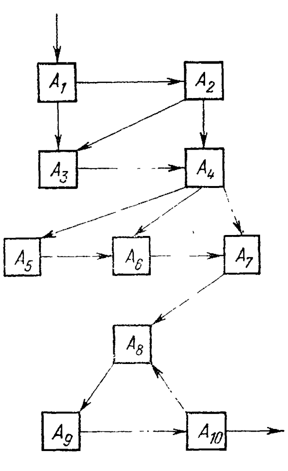

Рис. 32.1.

Существенные вычислительные трудности при реализации данной итерационной процедуры, связанные с большими размерами задачи (32.40)—(32.43), а также целесообразность при решении задачи (32.44), (32.45), (32.33)—(32.36) уметь формировать варианты матрицы технологического маршрута изготовления изделий в зависимости от получающейся в процессе решения загрузки оборудования, вызывают необходимость конструирования эвристического итерационного алгоритма формирования плановых заданий с наличием обратных связей.

Обобщенная блок-схема одного из таких алгоритмов приведена на рис. 32.1. Этот алгоритм относительно прост с вычислительной точки зрения (что необходимо для его реализации в производственных условиях, когда решение задачи идет в режиме диалога), но не позволяет получить оптимальное (в рамках сформулированных условий) решение задачи, так как рассматривается не весь набор вариантов. Однако применение этого алгоритма позволяет существенно сблизить показатели, характеризующие работу предприятия, статической и динамической задач.

Блок A_1 осуществляет решение оптимизационной задачи (32.1), (32.2), (32.4), (32.5), ее оптимальное решение обозначим $\{\bar{y}_q^s\}$.

Блок A_2 осуществляет решение оптимизационной задачи (32.31)—(32.36) при $\{z_{iq}^{\tau s}\} = \{a_{iq}^{\tau s}\}$, причем в качестве начального плана используется скорректированное $\{\bar{y}_q^s\}$, ее оптимальное решение обозначим $\{\tilde{y}_q^s\}$.

Блок A_3 выбирает общую часть решений $\{\bar{y}_q^s\}$ и $\{\tilde{y}_q^s\}$. Эта часть плана в дальнейшем не подвергается коррекции.

Блок A_4 на основе оптимального плана $\{\tilde{y}_q^s\}$ составляет матрицу невязок $W = \{w_i^\tau\}$, где

$$w_i^\tau = \Phi_i^\tau - \sum_{q \in Q} \sum_{s=1}^{T} a_{iq}^{\tau s} \tilde{y}_q^s.$$

Матрица W дает направление корректировки векторов P_q^s для ненулевых $\tilde{y}_q^s$.

Блок A_5 формирует списки заказов Q_i^τ для тех i, τ, где $w_i^\tau < 0$, т. е. $w_i^\tau = -\tilde{\varphi}_i^\tau$, проходящих обработку в период τ на i-ом виде оборудования.

Блок A_6 формирует следующие списки заказов: G_0 — множество заказов, не фигурирующих ни в одном из списков Q_i^τ; $G_l\,(\forall l \in \mathrm{N}_L)$ — множество заказов, фигурирующих l раз в различных списках Q_i^τ.

Внутри каждого списка G_l заказы упорядочиваются либо по приоритету, либо в зависимости от того, какие виды оборудования лимитируют их выпуск.

Блок A_7 формирует очередь заказов для корректировки и текущую информацию, необходимую для этого (матрицу текущих невязок $\{w_i^\tau\}$). Заказы из G_0 не корректируются. Первыми рассматриваются заказы из G_1, для них выбираются соответствующие P_q^s и вектор $w_{i_0}^\tau$, где

i_0 — лимитирующий вид оборудования. Таким образом, блок A_7 формирует очередной вектор P_q^s для корректировки и направление корректировки для этого вектора.

Блок A_8 осуществляет корректировку вектора P_q^s либо в соответствии с условиями (32.30), либо по эвристическому правилу.

Блок A_9 подсчитывает текущую матрицу невязок $\{w_i^\tau\}$.

Блок A_{10} анализирует матрицу $\{w_i^\tau\}$ и оставшийся непросмотренным список заказов и передает управление либо на продолжение корректировки, либо на ее окончание.

Такой алгоритм последовательного анализа векторов P_q^s не позволяет строить цепочки корректировок, а оценивает возможность корректировки каждого вектора в отдельности.

Если в результате проведенных вычислений окажется, что $D_2(k+1) > 0$, то имеющихся фондов рабочего времени ряда видов оборудования не хватает для выполнения плана производства. Имеются оценки недостающих фондов по месяцам периода планирования. Если эту нехватку невозможно устранить с помощью факторов, не учитываемых в модели, то можно определить перечень заказов, которые необходимо исключить для того, чтобы уложиться в имеющиеся фонды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А. С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа.— М. ВНИИ систем. исслед., 1979.
2. Астафьев Н. Н. Линейные неравенства и выпуклость.— М.: Наука, 1982.
3. Бабиков Г. В. О выделении совместных подсистем из системы линейных неравенств. В кн.: XVI Всесоюзн. алгебр. конф.: Тез. докл. 1981, с. 6—7.
4. Бабиков Г. В. О квазирешениях систем линейных уравнений и неравенств.— В кн.: Несобственные задачи оптимизации. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, с. 52—59.
5. Булавский В. А. Методы релаксации для систем неравенств.— Новосибирск: НГУ, 1981.
6. Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева Н. А. Численные методы линейного программирования.— М.: Наука, 1977.
7. Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации.— Новосибирск: Наука, 1977.
8. Василенко Г. Н., Фролов В. Н., Чернавин П. Ф., Букреев А. Е. Внедрение моделей оптимального текущего планирования металлургического производства на НТМК.— Сталь, 1982, № 12, с. 73—75.
9. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.
10. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1981.
11. Ватолин А. А. Об обобщенном решении несовместных систем линейных алгебраических уравнений.— В кн.: Методы мат. программирования и их прогр. обеспечение. Тез. докл. Научно-техн. конф. Свердловск, 1981, с. 33—34.
12. Ватолин А. А. Метод аппроксимации несобственных задач выпуклого программирования.— В кн.: Несобственные задачи оптимизации. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, с. 67 — 74.
13. Воробьев Н. Н. Исследование операций.— В кн.: БСЭ. 3-е изд., 1977, т. 18, с. 1246 — 1248.
14. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 1.— Минск: БГУ, 1977.
15. Глушков В. М., Каспшицкая М. Ф., Сергиенко И. В. Вопросы формализации и решения одного класса задач дискретной оптимизации.—ЖВМ и МФ, 1980, **20**, № 6, с. 1384—1399.
16. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.— М.: Наука, 1971.
17. Гупал А. М. Стохастические методы решения негладких эстремальных задач.— Киев: Наукова Думка, 1979.

18. Гурин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Э. В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств.— ЖВМ и МФ, 1967, 7, № 6, с. 1211 — 1228.
19. Дементьев В. Т. Задача выбора типажа оборудования.— В кн.: Методы управления большими системами. Т. II. Иркутск, 1970.
20. Евтушенко Л. Г. Численные методы решения задач нелинейного программирования.— ЖВМ и МФ, 1976, 16, № 2, с. 307 — 324.
21. Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г. Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования.— ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 4, с. 890 — 904.
22. Емеличев В. А., Комлик В. А. Методы построения последовательности планов для решения задач дискретной математики.— М.: Наука, 1981.
23. Еремин И. И. О некоторых свойствах узлов системы линейных неравенств.— УМН, 1956, XI, № 2, с. 169 — 172.
24. Еремин И. И. О несовместных системах линейных неравенств.— ДАН СССР, 1961, 138, № 6, с. 1280 — 1283.
25. Еремин И. И. Итеративный метод для чебышевских приближений несовместных систем линейных неравенств.— ДАН СССР, 1962, 143, № 6, с. 1253 — 1256.
26. Еремин И. И. О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, 30, № 2, с. 256 — 278.
27. Еремин И. И. Метод штрафов в выпуклом программировании.— ДАН СССР, 1967, 173, № 4, с. 748 — 751.
28. Еремин И. И. Метод фейеровских приближений в выпуклом программировании.— Матем. заметки, 1968, 3, № 2, с. 217 — 234.
29. Еремин И. И. О скорости сходимости в методе фейеровских приближений.— Матем. заметки, 1968, 4, № 1, с. 53 — 61.
30. Еремин И. И. Фейеровские отображения и задачи выпуклого программирования.— Сиб. матем. ж., 1969, X, № 5, с. 1034 — 1047.
31. Еремин И. И. О задачах выпуклого программирования с противоречивыми ограничениями.— Кибернетика, 1971, № 4, с. 124 — 129.
32. Еремин И. И. О задачах последовательного программирования.— Сиб. матем. ж., 1973, XIV, № 1, с. 53 — 63.
33. Еремин И. И. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования.— ДАН СССР, 1981, 256, № 2, с. 272 — 276.
34. Еремин И. И. Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1981.
35. Еремин И. И. Непрерывная аппроксимация несобственных задач линейного и выпуклого программирования.— В кн.: Классификация и оптимизация в задачах управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981, с. 3 — 14.
36. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1976.
37. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Итерационный метод обучения дискриминации бесконечных множеств.— Кибернетика, 1977, № 5, с. 108 — 110.

38. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования.— М.: Наука, 1979.
39. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования.— М.: Наука, 1976.
40. Журавлев Ю. И. Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификации.— ДАН СССР, 1976, 231, № 3, с. 532—535.
41. Журавлев Ю. И. Непараметрические задачи распознавания образов.— Кибернетика, 1976, № 6, с. 93—103.
42. Загоруйко Н. Г. Методы распознавания образов и их применения.— М.: Сов. радио, 1972.
43. Кардаш В. А., Пряжинская В. Г. Линейная модель оптимальной внутрихозяйственной организации оросительных систем.— Экон. и мат. методы, 1966, 2, № 3, с. 451—454.
44. Карл Фридрих Гаусс/Под ред. И. М. Виноградова.— М.: АН СССР, 1956.
45. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1980.
46. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.
47. Красовский Н. Н., Еремин И. И. Линейные неравенства и некоторые их приложения.— Укр. матем. ж., 1973, 25, № 4, с. 456 — 478.
48. Кривоногов А. И. Некоторые модификации комитетных алгоритмов в распознавании образов.— В кн.: Методы матем. программир. и применения. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, с. 49 — 55.
49. Кривоногов А. И. О некоторых комитетных конструкциях классификации.— В кн.: Методы оптимизации и распознавания образов в задачах планирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980, с. 92 — 98.
50. Мазуров В. Д. О комитете системы выпуклых неравенств. Труды ICM — 1966.— М.: МГУ, 1966, № 14, с. 41.
51. Мазуров В. Д. О построении комитета системы выпуклых неравенств.— Кибернетика, 1967, № 2, с. 56 — 59.
52. Мазуров В. Д. Об одном методе обучения узнаванию.— Кибернетика, 1970, № 2, с. 92 — 94.
53. Мазуров В. Д. Распознавание образов как средство автоматического выбора процедуры в вычислительных методах.— ЖВМ и МФ, 1970, 10, № 6, с. 1520 — 1525.
54. Мазуров В. Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания.— Кибернетика, 1971, № 3, с. 140 — 146.
55. Мазуров В. Д. Об одном интерационном методе планирования, использующем распознавание образов для учета плохо формализуемых факторов. Изв. АН СССР. Сер. техн. кибер., 1973, № 3, с. 205 — 207.
56. Мазуров В. Д. Методы математического программирования и распознавания образов в планировании производства.— В кн.: Матем. методы в планиров. пром. производства. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977, вып. 22, с. 3 — 27.
57. Мазуров В. Д. Теория и приложения комитетных конструкций.— В кн.: Методы для нестационарных задач математического программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, вып. 29, с. 31 — 63.

58. Мазуров В. Д. О некоторых дискретных аппроксимациях для несобственных задач.— В кн.: Классификация и оптимизация в задачах управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981, с. 15 — 30.
59. Мазуров В. Д., Казанцев В. С., Белецкий Н. Г. и др. Пакет КВАЗАР прикладных программ распознавания образов: Информационные материалы по мат. обеспечению.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.
60. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1970.
61. Метод комитетов в распознавании образов/Под ред. В. Д. Мазурова. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, вып. 6.
62. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение.— Кибернетика, 1965, № 1, с. 45—55; № 2, с. 85 — 89.
63. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации.— М.: Наука, 1978.
64. Несобственные модели математического программирования/Под ред. И. И. Еремина.— Свердловск. Ин-т матем. и механ. УНЦ АН СССР, 1980. (Депонент ВИНИТИ 03.07.80.)
65. Нильсон Н. Обучающиеся машины.— М.: Мир, 1968.
66. Нурминский Е. А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач.— Киев: Наукова Думка, 1979.
67. Плотников С. В. О методе проекции градиента в многоэкстремальных задачах.— В кн.: Классификация и оптимизация в задачах управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981, с. 113—116.
68. Плотников С. В. О циклическом проектировании на систему выпуклых множеств с пустым пересечением.— В кн.: Несобственные задачи оптимизации. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982, с. 60 — 66.
69. Попов Л. Д. Двойственный метод итеративной аппроксимации, использующий модифицированную функцию Лагранжа.— В кн.: Пятая Всесоюзн. конф. по пробл. теорет. кибернетики: Тез. докл. Новосибирск, 1980, с. 89 — 91.
70. Попов Л. Д. Модификация метода Эрроу — Гурвица поиска седловых точек.— Мат. заметки, 1980, 28, № 5, с. 777 — 784.
71. Розенблатт Ф. Принцип нейродинамики.— М.: Мир, 1965.
72. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
73. Романовский И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1977.
74. Сергиенко И. В., Лебедева Т. Т., Рощин В. А. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации.— Киев: Наукова Думка, 1980.
75. Скарин В. Д. О методе штрафных функций для задач нелинейного программирования.— ЖВМ и МФ, 1973, 13, № 5, с. 1186 — 1199.
76. Скарин В. Д. Об алгоритмах линейного программирования, использующих модификации функции Лагранжа.— В кн.: Методы для нестационарных задач математического программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979, с. 74 — 83.
77. Скарин В. Д. К регуляризации минимаксных задач, возникающих в выпуклом программировании.— ЖВМ и МФ, 1977, 17, № 6, с. 1408 — 1420.

78. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения.— М.: Мир, 1980.
79. Таккер А. У. Двойственные системы однородных линейных соотношений.— В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы/Под ред. Г. Куна, А. Таккера.— М.: ИЛ, 1959.
80. Тихонов А. Н. О некорректных задачах оптимального планирования.— ЖВМ и МФ, 6, № 1, 1966, с. 81 — 89.
81. Тихонов А. Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений.— ЖВМ и МФ, 1980, 20, № 6, с. 1373 — 1383.
82. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
83. Федоров В. В. Численные методы максимина.— М.: Наука, 1979.
84. Фомин В. Н., Холопов А. А. Рекуррентые процедуры построения комитета неравенств.— Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. и астрон., 1976, 1, вып. 1, с. 64—68.
85. Фролов В. Н. Оптимизация текущих программ на предприятиях черной металлургии.— Изв. ВУЗов, Черная металлургия, 1982, № 2, с. 147—152.
86. Фролов В. Н. Программирование планов выпуска продукции при имеющихся параметрах производства.— Автоматика, 1978, № 3, с. 88 — 90.
87. Чебышев П. Л. О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметричные около данной оси.— В кн.: Чебышев П. Л. Собр. соч. М.: Гостехиздат, 1948, т. 4, с. 167 — 211.
88. Червак Ю. Ю. Возвращающийся алгоритм метода отсечений и метод ветвей и границ.— Экономика и матем. методы, 1978, 14, № 5, с. 1002 — 1005.
89. Черников С. Н. Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.
90. Черников С. Н. Свертывание конечных систем линейных неравенств.— Докл. АН СССР. Сер. А, 1969, № 1, с. 32 — 35.
91. Черников С. Н. Системы линейных неравенств и некоторые их приложения.— В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. Киев: Наукова Думка, 1975, с. 149 — 175.
92. Черникова Н. В. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 2, с. 334 — 337.
93. Черникова Н. В. Алгоритм последовательного учета ограничений для решения задачи линейного программирования.— В кн.: Исслед. операций и АСУ. Киев, 1976, вып. 7, с. 19 — 31.
94. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.— Киев: Наукова Думка, 1979.
95. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962.
96. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.
97. Ablow C. M., Kaylor D. J. Inconsistent homogenious linear inequalities.— Bull. Amer. Math. Soc., 1965, 71, № 5.
98. Ablow C. M., Kaylor D. J. A committee solution of the pattern recognition problem.— IEEE Trans., 1965, 11, № 3.
99. Anwendungen der linearen parametrischen Optimierung/Ed. K. Lommatzsch.— Berlin: Akad.— Verl., 1979.

100. Beer K. Lösung grosser linearer Optimierungsaufgaben.— Berlin: VEB Deutsch. Verl. Wiss., 1977.
101. Blaha S. The convergence proof of a committee solution of the pattern recognition problem.— Kybernetika (Praha), 1969, 6, № 5, p. 474—483.
102. Charnes A., Cooper W. W., Kortanek K. On representations of semiinfinite programs which have no duality gaps.— Manag. Sci., 1965, № 12, p. 113—121.
103. Condorset A. Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.— P., 1785.
104. Duffin R. J., Karlovitz L. A. An infinite linear program with a duality gap.— Manag. Sci., 1965, № 12.
105. Elster K.— H., Reinhardt R., Schäuble M., Donath G. Einführung in die nichtlineare Optimierung.— Leipzig: Teubner, 1977.
106. Gamba A., Gambertini L., Palmieri G., Sanna R. Further experiments with PAPA.— Nuovo Gimento Suppl., 1961, 20, № 2.
107. Gol'shtein E. G., Tret'jakov N. V. Modified Lagrangians in convex programming and their generalization.— Math. Program. Stud., 1979, 10, p. 86—97.
108. Hestenes M. R. Multiplier and gradient methods.— J. Optimiz. Theory and Appl., 1969, 4, № 5, p. 303—320.
109. Mangasarian O. L. Multisurface method of pattern separation.— IEEE Trans., 1968, 14, p. 801—804.
110. Mazurov Vl. D. Method of committees and applications in operations research.— Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization, 1979, 10, № 3, p. 365—371.
111. Nozicka F., Guddat J., Hollatz H., Bank B. Theorie der linearen parametrischen Optimierung.— Berlin: Akad.— Verl., 1974.
112. Osborne M. A seniority logic: a logic for a committee machine.— IEEE Trans. Computers, 1977, 26, № 12, p. 1302—1306.
113. Powell M. J. D. A method for nonlinear constraints in minimization problems.— In: Optimization/Ed. R. Fletcher. London: Acad. Press, 1969, p. 283—298.
114. Ritter K. Optimization theory in linear spaces.— Math. Ann., 1969, 182, № 3, p. 189—206.
115. Rockafellar R. T. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming.— J. Optimiz. Theory and Appl., 1973, 12, № 5, p. 555—562.
116. Roodmen G. M. Post-infeasibility analysis in linear programming.— Manag. Sci., 1979, 25, № 9, p. 916—922.
117. Simon J. C. Recent progress in formal approach of pattern recognition and scene analysis.— Pattern Recognition, 1975, № 7.
118. Stiles W. J. Closest-point maps and their products. II.— Niew Arch. Wisk., 1965, 13, № 3, p. 212—225.
119. Studies on mathematical programming/Ed. A. Prékopa.— Budapest: Akad. Kiadó, 1980.
120. Takiyama R. A learning procedure for multisurface method of pattern separation.— Pattern Recognition, 1980, 12, № 2.
121. Zlobec S., Ben-Israel A. Duality in convex programming: a linearization approach.— Math. Operationsforsch. und Statist.— Ser. Optimization, 1979, № 10, S. 171—178.

Иван Иванович Еремин,
Владимир Данилович Мазуров,
Николай Николаевич Астафьев

НЕСОБСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО
И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Серия: «Экономико-математическая библиотека»)

Редактор *А. Д. Вайнштейн*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *Т. Г. Егорова, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11877

Сдано в набор 03.11.82. Подписано к печати 15.07.83. Т-15668. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага кн.-журн. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 19,19. Тираж 4500 экз. Заказ № 397. Цена 2 р. 90 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25